

**Übungsaufgaben zur Vorlesung  
“Mathematik für Physiker III”  
WS 2018/19**

**Blatt 14 (Residuen)**

Abgabetermin: Montag, den 4. Februar 2019, in der Vorlesung

---

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie die folgenden Residuen:

- a)  $\operatorname{Res}\left(\frac{\sin z}{z^6}; 0\right);$   
b)  $\operatorname{Res}\left(z \cos \frac{1}{z+1}; -1\right).$

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

- a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^4};$   
b)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^{2n}},$  wobei  $n \in \mathbb{N}$  ist.

**Aufgabe 3.** Sei  $f \in \mathcal{H}(\bar{G})$  und  $f(z) \neq 0$  für alle  $z \in \bar{G}$ . Man zeige: Gibt es ein  $z_0 \in G$  mit  $|f(z_0)| = \min_{z \in \bar{G}} |f(z)|$ , so ist  $f$  konstant in  $G$ .

**Aufgabe 4.** Beweisen Sie das folgende Lemma von Jordan: Es sei  $f$  eine stetige Funktion im Gebiet  $D_{R_0} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0, |z| \geq R_0\}$  derart, daß

$$M(R) = \max_{z \in K_R} |f(z)| \rightarrow 0$$

für  $R \rightarrow \infty$ , wobei  $K_R$  die Halbkreislinie  $\{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0, |z| = R\}$  ist. Dann gilt für jedes  $\lambda > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} e^{i\lambda z} f(z) dz = 0.$$

**Aufgabe 5.** Man berechne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1) \cos 5x}{x^2 - 2x + 5} dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2},$$

wobei  $a > 0$  ist.

**Aufgabe 6.** Man zeige: Das Bild jeder Kreislinie oder Gerade unter einer gebrochen-linearen Funktion ist eine Kreislinie oder Gerade.

