Übungsaufgaben zur Vorlesung
"Mathematik für Physiker III"
WS 2018/19

Blatt 13 (Isolierte Singularitäten)

Abgabetermin: Montag, den 28. Januar 2019, in der Vorlesung

Aufgabe 1.

a) Man zeige, dass die Funktion

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{(e^z - 1)^3}$$

einen Pol erster Ordnung in $z_0 = 0$ hat.

b) Für diese Funktion behandle man die Singularität $z_0 = \infty$.

Aufgabe 2.

a) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Man berechne das Integral

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^n + 1}.$$

b) Es sei $p(z)$ ein Polynom vom Grade $n \geq 2$. Alle Nullstellen des Polynoms seien in einer Kreisscheibe $B(0, R)$. Man berechne das Integral

$$\int_{|z|=R} \frac{dz}{p(z)}.$$

Aufgabe 3. Für die folgenden holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ behandle man die isolierte Singularität 0 so: Ist die Singularität hebbar, so hebe man sie, ist sie ein Pol, bestimme man den Hauptteil, und ist sie wesentlich, so bestimme man für alle genügend kleinen $\varepsilon > 0$ das Bild von $\{z : \ 0 < |z| < \varepsilon\}$ unter der Funktion:

$$\frac{1}{1 - e^z}; \qquad \exp \frac{1}{z}; \qquad \cos \frac{1}{z}; \qquad \frac{\sin z}{z}.$$

Aufgabe 4. Es sei z_0 eine isolierte Singularität von $f(z)$. Man zeige, daß z_0 kein Pol von $e^{f(z)}$ ist.

Aufgabe 5. Man finde die Laurent-Reihe der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(1 - z)(z + 2)}$$

in folgenden Gebieten:

a) $B(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$;
b) $U_{1,2}(0) = \{z \in \mathbb{C} : \ 1 < |z| < 2\}$;
c) $U_{2,\infty}(0) = \{z \in \mathbb{C} : \ 2 < |z|\}$.

Aufgabe 6. Man bestimme den Hauptteil der Funktion

$$f(z) = \frac{z^6}{(z^2+1)(z^2-4)}$$

im Unendlichen.

Viel Spaß und viel Erfolg!

Aufgabe	1		2		3	4	5	6	
	a	b	a	b					
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	32