Übungsaufgaben zur Vorlesung
"Mathematik für Physiker III"
WS 2018/19

Blatt 12 (Cauchy-Formel)

Abgabetermin: Montag, den 21. Januar 2019, in der Vorlesung

Aufgabe 1. Man beweise:

a) Die Funktion $f(z) = \sin z$ nimmt alle komplexen Werte w an, d.h. die Gleichung $\sin z = w$ ist lösbar für jedes $w \in \mathbb{C}$.

b) Die Funktion $f(z) = \sin z$ ist unbeschränkt auf ganz $\mathbb{C}$. Dies gilt auch für $f(z) = \cos z$.

Aufgabe 2.

a) Es sei $n = 0, 1, \ldots$, und r und c seien zwei positive reelle Zahlen. Für die ganze Funktion f gelte die Abschätzung $|f(z)| \leq c\,|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq r$. Man zeige, daß dann f ein Polynom höchstens n-ten Grades ist.

b) Kann $|f(z)| \leq c\,|z|^n$ durch die Abschätzung $|f(z)| \leq c\,|z|^{n+\varepsilon}$ mit einem $\varepsilon < 1$ ersetzt werden, so daß *a*) immer noch gilt?

Aufgabe 3. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine geschlossene, an einem Punkt der positiven reellen Halbachse beginnende Kurve. Für $n \in \mathbb{N}$ werde die Auswahl eines Wertes $\sqrt[n]{\gamma(t)}$ für die n-te Wurzel von $\gamma(t)$ durch $\sqrt[n]{\gamma(a)} > 0$ und die Stetigkeit von $\sqrt[n]{\gamma}\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ festgelegt. Man berechne das dementsprechend aufgefaßte Integral

$$\int_\gamma \sqrt[n]{z}\, dz$$

aus n, $\gamma(a)$ und der Umlaufszahl $\mathrm{Ind}_\gamma(0)$.

Aufgabe 4. Welche Werte kann das Integral

$$\int_\gamma \frac{dz}{1 + z^2}$$

für geschlossene Kurven γ in $\mathbb{C} \setminus \{\pm\imath\}$ annehmen?

Aufgabe 5. Man zeige, daß für $\Re z > 1$ durch

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

eine holomorphe Funktion gegeben ist, und gebe eine Reihendarstellung für $\zeta'(z)$ an.

Die Funktion ist die berühmte Riemannsche Zetafunktion. Sie läßt sich zu einer in ganz $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion fortsetzen, die bei $z = 1$ einen Pol erster Ordnung hat und sonst holomorph ist.

Aufgabe 6. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Liouville den Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom $P(z) = c_n z^n + \ldots + c_1 z + c_0$ vom Grade $n > 0$ (d.h. $c_n \neq 0$) hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Viel Spaß und viel Erfolg!

Aufgabe	1		2		3	4	5	6	
	a	b	a	b					
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	32