Übungsaufgaben zur Vorlesung
“Mathematik für Physiker III”
WS 2018/19

Blatt 11 (Potenzreihen)

Abgabetermin: Montag, den 14. Januar 2019, in der Vorlesung

Aufgabe 1.

a) Es sei

$$f(z) := \frac{\sin z}{(z-1-\imath)^2}$$

und $c_n := \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Man bestimme den Konvergenzradius von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

b) Es sei

$$f(z) := \exp \frac{\cos z}{z+4}$$

und $c_n := \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Man bestimme den Konvergenzradius von $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Aufgabe 2. Man berechne:

a)

$$\int_{|z-1|=2} \frac{\sin z}{z^4}\, dz.$$

b)

$$\int_{|z|=4} \frac{1}{(z-2)^2}\, dz.$$

Aufgabe 3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen in $\mathbb{R}$ und $f_0 : U_0 \to \mathbb{R}$ reell analytisch, d.h. überall in I lokal in eine Potenzreihe entwickelbar. Man zeige, daß es eine in $\mathbb{C}$ offene Menge U mit $U \cap \mathbb{R} = I$ und eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit $f \restriction_I = f_0$ gibt.

Aufgabe 4. Man zeige:

a) Jede holomorphe Funktion in einem sternförmigen Gebiet besitzt eine Stammfunktion.

b) Die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z}$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzt keine Stammfunktion.

Aufgabe 5. Sei $n \in \mathbb{N}$. Man definiere die mehrdeutige Funktion $f(z) = \sqrt[n]{z}$. Wie unterscheidet man die Zweige der Funktion?

Aufgabe 6. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph. Man beweise: Ist $B(a,r) \subset G$ und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

in $B(a,r)$, so gelten die folgenden Cauchy-Ungleichungen für die Koeffizienten c_n:

$$|c_n| \leq \frac{1}{r^n} \sup_{|\zeta - a| = r} |f(\zeta)|.$$

Viel Spaß und viel Erfolg!

Aufgabe	1		2		3	4	5	6	
	a	b	a	b					
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	32