Übungsaufgaben zur Vorlesung
"Mathematik für Physiker III"
WS 2018/19

Blatt 10 (Holomorphe Funktionen)

Abgabetermin: Montag, den 7. Januar 2019, in der Vorlesung

Aufgabe 1. Man zeige, daß $e^{\imath z} = \cos z + \imath \sin z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, und leite daraus ab:

a) Sinus und Cosinus haben nur reelle Nullstellen.
b) Gleichmäßig in x gilt

$$\begin{aligned} \lim_{y\to\pm\infty} |\cos(x+\imath y)| &= \infty, \\ \lim_{y\to\pm\infty} |\sin(x+\imath y)| &= \infty. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Sei $f(z)$ eine holomorphe Funktion auf einem zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Man zeige:

a) Nimmt f nur reelle Werte an, so muß f konstant sein.
b) Sind u und v Real- bzw. Imaginärteil von $f(z)$, so sind die Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ harmonisch.

Aufgabe 3. Man beweise den Gaußschen Integralsatz (vgl. Satz 27.6) in der komplexen Form

$$\int_{\partial G} f(z)\,dz = \int_G \frac{\partial f}{\partial \bar z} d\bar z \wedge dz,$$

wobei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ist und man definiert $d\bar z \wedge dz = 2\imath\, dxdy$.

Aufgabe 4. Man zeige:

a) Die Funktion $f(z) = e^z$ nimmt alle komplexen Werte $w \neq 0$ an, d.h. die Gleichung $e^z = w$ ist lösbar für jedes $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
b) Ist $\varphi = \arg w$, so haben alle Lösungen der Gleichung $e^z = w$ die Gestalt

$$z = \ln|w| + \imath\,(\varphi + 2k\pi)$$

mit $k \in \mathbb{Z}$.

Ist $e^z = w$, so nennt man z den Logarithmus der komplexen Zahl w. Man schreibt $z = \ln w$. Insbesondere gilt $\ln 1 = 2k\pi\imath$, $\ln(-1) = (2k+1)\pi\imath$ und $\ln \imath = (2k+1/2)\pi\imath$. Für $k=0$ erhält man den Hauptzweig des (komplexen) Logarithmus.

Aufgabe 5. Man beschreibe die durch e^z gegebene Abbildung des Rechtecks

$$\{x + \imath y : \ x \in [0,1], \ y \in [0,\pi]\}$$

in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 6. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $z \notin \partial G$. Man berechne:

$$\frac{1}{2\pi\imath} \int_{\partial G} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Viel Spaß und viel Erfolg!

Aufgabe	1		2		3	4	5	6	
	a	b	a	b					
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	32