Übungsaufgaben zur Vorlesung
"Mathematik für Physiker III"
WS 2018/19

Blatt 9 (Wärmeleitungsgleichung)

Abgabetermin: Montag, den 17. Dezember 2018, in der Vorlesung

---

Aufgabe 1. Sei $u(t,x)$ eine dreimal stetig differenzierbare Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung im Halbraum $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$. Man beweise:

a) Konvergiert $u(t,x)$ gleichmäßig in x auf jeder Kugel $B(0,R)$ im $\mathbb{R}^n$ gegen eine Funktion $u_0(x)$, wenn $t\to\infty$, so ist $u_0(x)$ harmonisch im $\mathbb{R}^n$.

b) Die Funktion $u(t,x)$ erfüllt einen Mittelwertsatz im Halbraum.

Aufgabe 2. Mittels Separation der Veränderlichen lösen Sie die folgenden Randwertprobleme für die Wärmeleitungsgleichung

$$u'_t = a^2 u''_{xx}$$

im Halbstreifen $t>0$ and $x\in(0,l)$):

a)

$$\begin{array}{rcll} u(0,x) & = & u_0(x) & \text{für} \quad x\in(0,l); \\ u(t,0) & = & v_0(t) & \text{für} \quad t>0, \\ u(t,l) & = & v_l(t) & \text{für} \quad t>0. \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcll} u(0,x) & = & u_0(x) & \text{für} \quad x\in(0,l); \\ u'_x(t,0) & = & w_0(t) & \text{für} \quad t>0, \\ u'_x(t,l) & = & w_l(t) & \text{für} \quad t>0. \end{array}$$

Aufgabe 3. Man beweise: Für $u_0\in L^1(\mathbb{R}^n)$ löst

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, u_0(y)\, dy$$

das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{array}{rcll} (\partial_t - \Delta)\, u(t,x) & = & 0 & \text{für} \quad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) & = & u_0(x) & \text{für} \quad x\in\mathbb{R}^n. \end{array}$$

Die Funktion

$$H(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

von $t > 0$ and $x \in \mathbb{R}^n$ heißt die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung im Halbraum $t > 0$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie:

a) Setzt man $H(t,x)$ durch Null für $t < 0$ fort, so erhält man eine glatte Funktion in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus (0,0)$.

b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} H(t,x)dx = 1$ für alle $t > 0$.

c) Die Funktion $H(t,x)$ genügt der Wärmeleitungsgleichung für $t > 0$.

Aufgabe 5. Finden Sie die Lösung der Wellengleichung

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$$

im Halbstreifen $(0,\infty) \times (0,l)$ unter den Randbedingungen

$$\begin{array}{rcll} u(0,x) & = & u_0(x) & \text{für} \quad x \in (0,l), \\ u'_t(0,x) & = & u_1(x) & \text{für} \quad x \in (0,l); \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} u(t,0) & = & 0 & \text{für} \quad t > 0, \\ u(t,l) & = & 0 & \text{für} \quad t > 0. \end{array}$$

Aufgabe 6 (Kirchhoff'sche Lösung)**.** Man zeige: Ist

$$\begin{array}{rcl} u_0 & \in & C^3(\mathbb{R}^2), \\ u_1 & \in & C^2(\mathbb{R}^2), \end{array}$$

so löst die Funktion

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\Big[\partial_t\Big(t\int_{|y|\le 1}\frac{u_0(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}dy\Big) + \Big(t\int_{|y|\le 1}\frac{u_1(x+ty)}{\sqrt{1-|y|^2}}dy\Big)\Big]$$

das Cauchy-Problem für die Wellengleichung

$$\begin{array}{rcll} (\partial_t^2 - \Delta)\, u(t,x) & = & 0 & \text{für} \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2, \\ u(0,x) & = & u_0(x) & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ \partial_t u(0,x) & = & u_1(x) & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Viel Spaß und viel Erfolg!

Aufgabe	1		2		3	4	5	6	
	a	b	a	b					
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	32