Übungsaufgaben zur Vorlesung "Mathematik für Physiker III" WS 2018/19

Blatt 8 (Harmonische Funktionen)

Abgabetermin: Montag, den 10. Dezember 2018, in der Vorlesung

---

Aufgabe 1. Sei G ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$, u, v harmonisch auf U und stetig auf $\overline{U}$. Man beweise:

a) Ist u reellwertig, so nimmt u sein Maximum auf ∂G an.
b) Gilt $u = v$ auf ∂G, so ist $u = v$ in ganz G.

Aufgabe 2. Setze

$$\begin{aligned} z &= x_1 + \imath x_2, \\ \zeta &= y_1 + \imath y_2. \end{aligned}$$

Man zeige:

a) Sei $\zeta^* = R^2/\bar{\zeta}$, dann ist

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{(z-\zeta^*)(z-\bar{\zeta})}{(z-\zeta)(z-\bar{\zeta}^*)} \right|$$

die Greensche Funktion für den Halbkreis $\{\zeta \in \mathbb{C} : \ |\zeta| < R, \ \Im\zeta > 0\}$.

b) Die Funktion

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{e^{z-\bar{\zeta}} - 1}{e^{z-\zeta} - 1} \right|$$

ist die Greensche Funktion für den Streifen $\{\zeta \in \mathbb{C} : \ 0 < \Im\zeta < \pi\}$.

Aufgabe 3. Finden Sie alle harmonischen Funktionen auf der reellen Achse $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4. Sei $y = Tx$ eine orthogonale Transformation des Raums $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Ist $u(y)$ eine harmonische Funktion in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$, so ist $U(x) := u(Tx)$ harmonisch im Gebiet $T^{-1}(G)$.

Aufgabe 5. Berechnen Sie den formal adjungierten Operator Δ^* für den Laplace-Operator, d.h.,

$$(\Delta u, g)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (u, \Delta^* g)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

gilt für alle glatten Funktionen f, g mit kompaktem Träger im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $(\Delta^*)^* = \Delta$.

Aufgabe 6. Sei G ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand im $\mathbb{R}^n$ und S eine offene Teilmenge des Randes von G. Bestimmen Sie die Eulersche Gleichung für das Variationsproblem

$$\int_G |\nabla u|^2 dx \mapsto \min$$

über alle Funktionen $u \in C^2(\overline{G})$ mit $u = u_0$ auf S, wobei u_0 eine gegebene Funktion auf S ist.

Viel Spaß und viel Erfolg!

Aufgabe	1		2		3	4	5	6	
	a	b	a	b					
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	32