Übungsaufgaben zur Vorlesung "Mathematik für Physiker III" WS 2018/19

Blatt 7 (Fouriertransformation temperierter Distributionen)

Abgabetermin: Montag, den 3. Dezember 2018, in der Vorlesung

Aufgabe 1.

a) Es sei Δ der Laplace-Operator im $\mathbb{R}^n$ und $\lambda > 0$. Man beweise, daß die Gleichung $\Delta u - \lambda u = f$ genau eine Lösung im Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für jedes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ hat.

b) Es sei A ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten im $\mathbb{R}^n$ derart, daß $\sigma(A)(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist. Man zeige, daß die Gleichung $Au = f$ eindeutig lösbar im Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für jedes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist.

Aufgabe 2. Es sei $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ ein Multi-Index. Man berechne die Fouriertransformation folgender temperierter Distributionen auf $\mathbb{R}^n$:

a) $f(x) = D^\alpha \delta(x)$;

b) $f(x) = x^\alpha$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ aller schnellfallenden Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen bezüglich der Multiplikation ist, d.h. $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für alle $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 4. Welche der folgenden Funktionen gehört zu $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|^2}; \qquad f(x) = e^{-|x|^2}; \qquad f(x) = |x|^k e^{-|x|^2}, \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Aufgabe 5. Beweisen Sie, daß für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und Multi-Indizes α, β gilt

$$\begin{aligned} F(D^\alpha f)(\xi) &= \xi^\alpha F f(\xi), \\ F(x^\beta f)(\xi) &= (-1)^{|\beta|} D^\beta F f(\xi). \end{aligned}$$

Aufgabe 6. Die Funktion $f(x)$ wird durch die Vorschrift

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls} \quad x < 0, \\ x+1, & \text{falls} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

gegeben. Man berechne die zweite Ableitung von $f(x)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Viel Spaß und viel Erfolg!

Aufgabe	1		2		3	4	5	6	
	a	b	a	b					
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	32