Übungsaufgaben zur Vorlesung "Mathematik für Physiker III" WS 2018/19

Blatt 6 (Distributionen)

Abgabetermin: Montag, den 26. November 2018, in der Vorlesung

---

Aufgabe 1. Man beweise:

a) Ist $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, so gilt $\chi(x)\delta(x) = \chi(0)\delta(x)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Insbesondere ist $x\delta(x) = 0$.

b) Es gilt $x\,\mathcal{P}\dfrac{1}{x} = 1$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, wobei die Distribution $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ durch

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle := \text{p.v.} \int \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ definiert wird.

Die Aufgabe 1 impliziert, daß es unmöglich ist, eine assoziative und kommutative Multiplikation von Distributionen zu definieren, denn wäre es möglich, so hätte man

$$\begin{aligned} 0 &= 0\,\mathcal{P}\frac{1}{x} \\ &= (x\delta(x))\,\mathcal{P}\frac{1}{x} \\ &= (\delta(x)x)\,\mathcal{P}\frac{1}{x} \\ &= \delta(x)\Big(x\mathcal{P}\frac{1}{x}\Big) \\ &= \delta(x). \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Die sogenannte Heavisidesche Funktion $\theta(x)$ wird durch die Vorschrift

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x > 0; \\ 0 & \text{falls} \quad x \le 0 \end{cases}$$

definiert. Man zeige:

a) Die Funktion $\theta(x)$ ist eine Fundamentallösung für den Differentialoperator $\dfrac{d}{dx}$.

b) Sei

$$A := \left(\frac{d}{dx}\right)^m + a_{m-1}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} + \ldots + a_0(x)$$

ein gewöhnlicher Differentialoperator mit glatten Koeffizienten in einem Intervall I um 0 und $\varphi(x)$ sei die Lösung des Cauchy-Problems

$$A\varphi\,(x) = 0, \qquad x \in I;$$

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(m-2)}(0) = 0, \quad \varphi^{(m-1)}(0) = 1.$$

Dann ist $\Phi(x) = \varphi(x)\theta(x)$ eine Fundamentallösung für A.

Aufgabe 3. Man bestimme, ob der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \sin \frac{x}{\varepsilon}$$

im Raum $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ existiert.

Aufgabe 4. Man zeige, daß der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\dfrac{x^2}{4\varepsilon}}$$

im Raum $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ gleich $\delta(x)$ ist.

Aufgabe 5. Man beweise, daß die Delta-Funktion $\delta(x)$ eine nichtreguläre Distribution auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 6. Es seien c_1 und c_2 beliebige Konstanten. Man beweise, daß die Distribution

$$u(x) = c_1 + c_2\theta(x) + \log|x|$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $xu'(x) = 1$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ist.

Viel Spaß und viel Erfolg!

Aufgabe	1		2		3	4	5	6	
	a	b	a	b					
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	32