Übungsaufgaben zur Vorlesung "Mathematik für Physiker III" WS 2018/19

Blatt 5 (Partielle Differentialgleichungen)

Abgabetermin: Montag, den 19. November 2018, in der Vorlesung

---

Aufgabe 1. Man bestimme charakteristische Varietäten für die folgenden Differentialgleichungen:

a) Tricomische Differentialgleichung

$$y\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

b) Schrödingersche Differentialgleichung

$$\imath\hbar\,\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\,\Delta_x u + V(x)u,$$

wobei $\hbar$ die Planck-Konstante, m_0 das Maß des Elementarteilchens und $V(x)$ das Potential des Vektorfeldes sind.

Aufgabe 2. Man bestimme die charakteristischen Hyperflächen (Kurven) für die folgenden Differentialgleichungen:

a) Tricomische Differentialgleichung

$$y\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

b) D'Alembertsche Differentialgleichung (Wellengleichung)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\,\Delta_x u = 0,$$

wobei c eine nichtnegative Konstante ist.

Aufgabe 3. Man bestimme alle Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ im $\mathbb{R}^n$, die nur von $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ abhängen, d.h. alle Lösungen der Gestalt $u(x) = U(|x|)$ mit einer 2-mal stetig differenzierbaren Funktion U.

Aufgabe 4. Man bestimme alle Lösungen der Schrödingerschen Differentialgleichung

$$\imath\hbar\,\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\,\Delta_x u + V(x)u,$$

die die Gestalt $u(t,x) = v(t)w(x)$ haben (Separation der Variablen). Man beschreibe die Differentialgleichungen, auf die sich das Verfahren verbreiten läßt.

Aufgabe 5. Man löse die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$y\,\frac{\partial u}{\partial x} - x\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

im $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 6. Bestimmen Sie eine Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$x\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

im Einheitskreis um 0 im $\mathbb{R}^2$ mit Daten $u(x,y) = x^2 + y^2$ auf der Einheitskreislinie.

Viel Spaß und viel Erfolg!

Aufgabe	1		2		3	4	5	6	
	a	b	a	b					
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	32