Übungsaufgaben zur Vorlesung
"Mathematik für Physiker III"
WS 2018/19

Blatt 4 (Singuläre Differentialgleichungen)

Abgabetermin: Montag, den 12. November 2018, in der Vorlesung

---

Aufgabe 1.

a) Es seien $f \in C[0,1]$ und $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Man bestimme die Lösung des folgenden Randwertproblems:

$$\begin{aligned} \varepsilon\ddot{x}_\varepsilon + \dot{x}_\varepsilon &= f(t), \quad t \in (0,1), \\ x_\varepsilon(0) &= x_0, \\ x_\varepsilon(1) &= x_1. \end{aligned}$$

b) Man berechne den punktweisen Grenzwert

$$x(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon(t).$$

Genügt $x(t)$ dem Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t), \quad t \in (0,1), \\ x(0) &= x_0? \end{aligned}$$

Aufgabe 2.

a) Es seien $f \in C[0,1]$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Man bestimme die Lösung des folgenden Randwertproblems:

$$\begin{aligned} \varepsilon\ddot{x}_\varepsilon + \dot{x}_\varepsilon &= f(t), \quad t \in (0,1), \\ x_\varepsilon(0) &= x_0, \\ \dot{x}_\varepsilon(1) &= 0. \end{aligned}$$

b) Man berechne den punktweisen Grenzwert

$$x(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon(t).$$

Genügt $x(t)$ dem Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t), \quad t \in (0,1), \\ x(0) &= x_0? \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Es sei

$$A(t)\dot{x} = f(t, x)$$

ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung für die unbekannte Funktion $x : I \to \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, wobei $A(t)$ eine $(m \times n)$ -Matrix stetiger Funktionen auf I ist. Man bestimme das Hauptsymbol der Differentialgleichung $A(t)\dot{x} = f(t, x)$. Unter welchen Bedingungen auf A ist sie elliptisch?

Aufgabe 4. Man beweise die Leibnizsche Regel

$$D^\alpha(fg) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f \, D^{\alpha - \beta} g.$$

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass für die Differentialgleichung $t\dot{x} = x$ nicht der Existenz- und Eindeutigkeitssatz gilt.

Aufgabe 6. Lösen Sie mithilfe des Potenzreihenansatzes die Differentialgleichung von E. Laguerre (1834-1886)

$$t\ddot{x} + (1 - t)\dot{x} + mx = 0$$

$(m \in \mathbb{R})$.

Viel Spaß und viel Erfolg!

Aufgabe	1		2		3	4	5	6	
	a	b	a	b					
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	32