

**Übungsaufgaben zur Vorlesung
“Mathematik für Physiker III”
WS 2018/19**

Blatt 3 (Nichtlineare Differentialgleichungen)

Abgabetermin: Montag, den 5. November 2018, in der Vorlesung

Aufgabe 1.

- a) Man bestimme einen Näherungswert im Punkt $t_1 = t_0 + 0,1$ für die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sin x, \\ x(t_0) &= x_0.\end{aligned}$$

- b) Man bestimme Näherungswerte der Lösung in Punkten $t_2 = t_0 + 0,2$ und $t_3 = t_0 + 0,3$ und schätze die Rechenfehler ab.

Aufgabe 2.

- a) Man finde ein $r > 0$ mit der Eigenschaft, daß die nichtlineare Integralgleichung

$$x(t) = \lambda \int_0^1 \sin^2(t^2 x(s)) ds + t$$

eindeutig lösbar für alle $|\lambda| < r$ ist.

- b) Man zeige zwei erste Näherungslösungen der Integralgleichung und schätze den Rechenfehler ab.

Aufgabe 3. Ein System $\dot{x} = f(t, x)$ heißt autonom, falls $f(t, x)$ von t nicht abhängt. Man zeige: Ist $x = \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, eine Lösung des autonomen Systems $\dot{x} = f(x)$, so auch $x = \varphi(t + c)$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4. Man beweise: Jede gewöhnliche Differentialgleichung

$$x^{(m)} = F(t, x, x', \dots, x^{(m-1)})$$

der Ordnung m läßt sich in ein System $\dot{y} = f(t, y)$ erster Ordnung umwandeln.

Aufgabe 5. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der nichtfortsetzbaren Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2tx^2, \\ x(0) &= -1.\end{aligned}$$

