

**Übungsaufgaben zur Vorlesung  
“Mathematik für Physiker III”  
WS 2018/19**

**Blatt 2 (Existenz und Eindeutigkeit)**

Abgabetermin: Montag, den 29. Oktober 2018, in der Vorlesung

---

**Aufgabe 1.**

- a) Man zeige: Für die homogene Differentialgleichung  $xy'' + 2y' - xy = 0$  bilden die Funktionen

$$y_1 = \frac{e^x}{x}, \quad y_2 = \frac{e^{-x}}{x}$$

ein Fundamentalsystem.

- b) Durch die Variation der Konstanten bestimme man eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$xy'' + 2y' - xy = e^x.$$

**Aufgabe 2.** Man zeige:

- a) Die Funktion  $f(t, x) = x^{2/3}$  ist stetig, jedoch nicht Lipschitz-stetig in jedem Rechteck  $D \subset \mathbb{R}^2$ , das den Punkt 0 enthält.  
b) Die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^{2/3}, \\ x(0) &= 0 \end{cases}$$

hat unendlich viele verschiedene Lösungen im Intervall  $I = [-\varepsilon, \varepsilon]$  für jedes  $\varepsilon > 0$ .

Wie schon in der Vorlesung betont wurde, gehört es zu den Ausnahmen, wenn sich eine Differentialgleichung elementar integrieren läßt. Es gibt aber Methoden, auch in den schwierigen Fällen die Lösungen - wenigstens näherungsweise - zu gewinnen.

**Aufgabe 3.** Mittels Integration durch Potenzreihen bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung  $\dot{x} = t^2 + x$ .

**Aufgabe 4.** Löse die Riccatische Differentialgleichung

$$\dot{x} - t^3x + tx^2 = 2t.$$

