Übungsaufgaben zur Vorlesung "Mathematik für Physiker III" WS 2018/19

Blatt I (Einige Lösungsverfahren)

Abgabetermin: Montag, den 22. Oktober 2018, in der Vorlesung

Aufgabe 1. Gegeben seien auf Intervallen I, J stetige Funktionen $g : I \to \mathbb{R}$ und $h : J \to \mathbb{R}$ sowie die zugehörige Differentialgleichung

$$\dot{x} = g(t)h(x).$$

a) Zeigen Sie, dass jede Nullstelle x_0 von $h(x)$ eine konstante Lösung $x(t) \equiv x_0$ auf I liefert.

b) Es sei $h(x) \neq 0$ auf einem Intervall $J' \subset J$. Die Funktion $H : J' \to \mathbb{R}$ sei eine Stammfunktion von $1/h(x)$, und $H^{-1} : H(J') \to J'$ sei die Umkehrfunktion von $H(x)$. Ferner sei $G : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $g(t)$. Zeigen Sie, dass dann für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $x(t) := H^{-1}(G(t) + c)$ auf jedem Intervall $I' \subset I$, auf dem sie definiert ist, eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung darstellt.

Aufgabe 2. Zeigen Sie anhand eines Beispiels:

a) Bei einer nichtlinearen Differentialgleichung ist die Summe zweier Lösungen im Allgemeinen nicht wieder eine Lösung. Vergleichen Sie hierzu das Superpositionsprinzip für lineare Differentialgleichungen.

b) Für die Lösungen nichtautonomer Differentialgleichungen gilt die Translationsinvarianz im Allgemeinen nicht.

Aufgabe 3. Man bestimme die Lösung des folgenden Anfangswertproblems auf der reellen Achse:

$$\begin{cases} 2tx\,\dot{x} &= x^2 - t^2, \\ x(0) &= 0. \end{cases}$$

Aufgabe 4. Löse die Bernoullische Differentialgleichung

$$\dot{x} - 4\frac{x}{t} - t\sqrt{x} = 0.$$

Aufgabe 5. Man bestimme die Lösungen des folgenden Anfangswertproblems für eine autonome Differentialgleichung:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^{\frac{2}{3}}, \\ x(t_0) &= 0. \end{cases}$$

Aufgabe 6. Löse das folgende Anfangswertproblem für eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen:

$$\begin{cases} t^2\dot{x} &= -x, \\ x(1) &= e. \end{cases}$$

Viel Spaß und viel Erfolg!

Aufgabe	1		2		3	4	5	6	
	a	b	a	b					
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	32