Übungsaufgaben zur Vorlesung
“Mathematik für Physiker II”
SS 2020

Blatt 13 (Integration über Untermannigfaltigkeiten)

Abgabetermin: Dienstag, den 21. Juli 2020, online auf Moodle

Aufgabe 1.

a) Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &:= x^2 + xy - y - z, \\ g(x,y,z) &:= 2x^2 + 3xy - 2y - 3z. \end{aligned}$$

Man zeige, daß $C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = g(x,y,z) = 0\}$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und daß $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\varphi(t) := (t, t^2, t^3)$ eine globale Parameterdarstellung von C ist.

b) Die Funktionen $f_j : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $j = 1,2,3$, seien definiert durch

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) &:= x_1x_3 - x_2^2, \\ f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) &:= x_2x_4 - x_3^2, \\ f_3(x_1,x_2,x_3,x_4) &:= x_1x_4 - x_2x_3. \end{aligned}$$

Man zeige, daß $M := \{x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} : f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 2. Berechnen Sie das Oberflächenmaß für die folgenden Untermannigfaltigkeiten M des $\mathbb{R}^{n+1}$:

a) $M = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = R\}$ (die Sphäre vom Radius R um 0 im $\mathbb{R}^{n+1}$);

b) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = f(x)\}$ (der Graph einer differenzierbaren Funktion $f : G \to \mathbb{R}$, wobei G ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$ ist).

Aufgabe 3. Es sei A die bzgl. räumlicher Polarkoordinaten (φ, ϑ) auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \\ \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2 \end{aligned}$$

gegebene Teilmenge mit $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$ und $-\pi/2 \leq \vartheta_1 < \vartheta_2 \leq \pi/2$. Man berechne ihre Fläche.

Aufgabe 4. Man berechne die Fläche des Rotationsellipsoids

$$M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 1\right\}$$

mit $a, b > 0$.

Aufgabe 5. Finden Sie den Flächeninhalt des Teils M der Sphäre

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

im $\mathbb{R}^3$, der außerhalb der Zylinder $x^2 + y^2 = \pm ax$ liegt (Problem von Viviani).

Aufgabe 6. Sei G ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand im $\mathbb{R}^n$ und $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ der äußere Normaleneinheitsvektor von ∂G im Punkt x. Man zeige, daß

$$\mathrm{Vol}(G) = \frac{1}{n} \int_{\partial G} (x, \nu(x))\, ds.$$

Insbesondere gilt $\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial B) = n\mathrm{Vol}_n(B)$ für jede n-dimensionale Einheitskugel B.

Viel Spaß und viel Erfolg!

Aufgabe	1		2		3	4	5	6	
	a	b	a	b					
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	32