Übungsaufgaben zur Vorlesung
"Mathematik für Physiker II"
SS 2020

Blatt 12 (Kurvenintegrale)

Abgabetermin: Dienstag, den 14. Juli 2020, online auf Moodle

Sei C eine reguläre Kurve im $\mathbb{R}^n$ gegeben durch $x = \varphi(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Unter einem Kurvenintegral zweiter Art über C versteht man

$$\int_C f_1(x)dx_1 + \ldots + f_n(x)dx_n := \int_a^b (f_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) + \ldots + f_n(\varphi(t))\varphi_n'(t))\, dt,$$

wobei $f_1, \ldots, f_n$ stetige (oder allgemeiner Riemann-integrierbare) Funktionen auf C sind.

Aufgabe 1. Man beweise:

a) Ist $\tau(x) = (\tau_1(x), \ldots, \tau_n(x))$ der Einheitstangentialvektor an die Kurve C, so gilt

$$\int_C f_1(x)dx_1 + \ldots + f_n(x)dx_n = \int_C (f_1(x)\tau_1(x) + \ldots + f_n(x)\tau_n(x))\, ds,$$

das Integral auf der rechten Seite heißt das Kurvenintegral erster Art über C.

b) Ist G ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand im $\mathbb{R}^2$ und P, Q stetig differenzierbare Funktionen in einer Umgebung von $\overline{G}$, so gilt die Formel

$$\int_{\partial G} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_G \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy,$$

die auch Green-Formel heißt.

Aufgabe 2. Man berechne das Integral

$$\int_C 2xy\, dx + x^2\, dy$$

über die Kurve C mit Anfangspunkt $A = (0, 0)$ und Endpunkt $E = (1, 1)$ auf der Ebene, wobei

a) C ist die Strecke der Gerade $y = x$;
b) C ist die Strecke der kubischen Parabel $x = y^3$.

Aufgabe 3. Man bestimme die Bedingungen auf eine stetig differenzierbare Funktion $f(x,y)$, unter denen das Kurvenintegral zweiter Art

$$\int_{AME} f(x,y)(-y dx + x dy)$$

von der Wahl des Weges von A nach E nicht abhängt.

Aufgabe 4. Sei $a > 0$. Man berechne das Integral

$$\int_C \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$$

über die Strecke C mit Anfangspunkt $A = (a, 0)$ und Endpunkt $E = (0, a)$ auf der Astroide (Sternkurve)

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos^3 t, \\ y(t) &= a \sin^3 t. \end{aligned}$$

Aufgabe 5. Seien $a, b > 0$. Berechnen Sie das Volumen (den Flächeninhalt) der Astroide

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} \leq 1 \right\}.$$

Aufgabe 6. Sei C eine geschlossene (d.h. mit den gleichen Anfangs- und Endpunkten) glatte Kurve im $\mathbb{R}^2$. Man berechne das Integral

$$\int_C \left(x^2 + y^2\right)^p (x dx + y dy),$$

wobei $p > -1$ ist.

Viel Spaß und viel Erfolg!

Aufgabe	1		2		3	4	5	6	
	a	b	a	b					
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	32