# Übungsaufgaben zur Vorlesung
# "Mathematik für Physiker II"
# SS 2020

### Blatt 11 (Lebesgue-integrierbare Funktionen)

Abgabetermin: Dienstag, den 7. Juli 2020, online auf Moodle

---

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie die folgenden zweifachen Integrale, indem Sie zu (verallgemeinerten) Polarkoordinaten übergehen:

*a)*

$$\iint_{\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy.$$

*b)*

$$\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dxdy.$$

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie die folgenden dreifachen Integrale, indem Sie zu sphärischen bzw. zylindrischen Koordinaten übergehen:

*a)*

$$\iiint_A f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz,$$

wobei das Gebiet $A \in \mathbb{R}^3$ durch die Flächen $z = x^2+y^2$, $x = y$, $x = 1$, $y = 0$ und $z = 0$ beschränkt ist.

*b)*

$$\iiint_A x^2\, dxdydz,$$

wobei das Gebiet $A \in \mathbb{R}^3$ durch die Flächen $x^2+y^2 = 2z$ und $z = 2$ beschränkt ist.

**Aufgabe 3** (die Tschebyschevsche Ungleichung)**.**

Sei $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ Lebesgue-integrierbar. Man zeige: Das äussere Mass der Menge $M_c := \{x \in \mathbb{R}^n : \ |f(x)| > c\}$ fuer $c > 0$ ist endlich und es gilt

$$\lambda^*(M_c) \leq \frac{1}{c}\, \|f\|_{L^1}.$$

Hinweis: $c\,\chi_{M_c} \leq |f|$.

Insbesondere ist die Menge aller Punkte, wo $f$ den Wert $+\infty$ oder $-\infty$ annimt, eine Nullmenge: $\lambda^*(M) = 0$ für $M := \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) = \pm\infty\}$.

**Aufgabe 4.** Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, beschränkt durch das Ellipsoid

$(a_1x + b_1y + c_1z + d_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z + d_2)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z + d_3)^2 = 1$,

wobei

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0.$$

**Aufgabe 5** (Berechnung des Gaußschen Integrals)**.**

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion zu

$$f(x,y) := \begin{cases} x\, e^{-x^2(1+y^2)}, & 0 \leq x < \infty, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $f$ stetig. Integrieren Sie $f$ auf $\mathbb{R}^2$ nach zwei Methoden (direkt als mehrfaches Integral und nach einer passenden Substitution als mehrfaches Integral einer Integrandenfunktion, die sich als das Produkt zweier Funktionen in jeweils einer Variable schreiben läßt). Rechtfertigen Sie aus Ihren Berechnungen die Integralgleichung

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}.$$

Die Begründung Ihrer Schritte ist hierbei sehr wichtig, und Sie sollten genau zeigen, wann Sie z.B. den Fubini-Satz über die Vertauschbarkeit der Reihenfolge beim mehrfachen Integral verwenden. Über das Integral hat Lord Kelvin gesagt: "A mathematician is one to whom *that* is as obvious as that twice two makes four is to you."

**Aufgabe 6.** Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum und $r > 0$. Man zeige: Bezeichnet $rK$ das Bild von $K$ unter der Homothetie $x \mapsto rx$, so gilt

$$\mathrm{Vol}(rK) = r^n\, \mathrm{Vol}(K).$$

Viel Spaß und viel Erfolg!

---

| Aufgabe | 1 | | 2 | | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | b | | | | | |
| Punkte | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 32 |