Übungsaufgaben zur Vorlesung
"Mathematik für Physiker II"
SS 2020

Blatt 10 (Lebesgue-Integral)

Abgabetermin: Dienstag, den 30. Juni 2020, online auf Moodle

Aufgabe 1. Sei φ eine additive Mengenfunktion auf einem Ring R. Man zeige:

a) Für alle $A, B \in R$ gilt $\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B)$. Insbesondere ist $\varphi(\emptyset) = 0$.

b) Ist $\varphi(A) \geq 0$ für alle $A \in R$, so gilt $\varphi(B) \leq \varphi(A)$ falls $B \subset A$.

Aufgabe 2. Beweisen Sie:

a) Ist $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion, so ist $|f|$ auch meßbar.

b) Sind $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ meßbar und ist $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, so ist die durch $x \mapsto F(f(x), g(x))$ definierte Funktion meßbar.

Aufgabe 3. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine abzählbare Menge. Beweisen Sie, daß das äußere Lebesgue-Maß von A gleich 0 ist, d.h. $\lambda^*(A) = 0$.

Aufgabe 4. Sei X eine Menge, $a \in X$ ein fester Punkt und $\delta_a : \wp(X) \to [0, \infty)$ definiert durch

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{falls } A \ni a, \\ 0, & \text{falls } A \not\ni a. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß δ_a ein σ-additives Mass auf der σ-Algebra $\wp(X)$ ist (δ_a heißt die δ-Funktion auf X mit Träger a).

Aufgabe 5. Sei $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ eine abzählbare Menge und jedem Element $x_n \in X$ sei eine Zahl $p_n \geq 0$ zugeordnet, so daß die Reihe $p_1 + p_2 + \ldots$ konvergiert. Für jede Teilmenge $A \subset X$ setzen wir

$$\mu(A) := \sum_{n \in \mathbb{N} \colon x_n \in A} p_n .$$

Zeigen Sie, daß μ ein σ-additives Maß auf der σ-Algebra aller Teilmengen von X ist.

Aufgabe 6 (Wichtigstes Beispiel einer nichttrivialen Nullmenge)**.**

Das Cantorsche Diskontinuum wird folgendermaßen konstruiert: Aus dem Intervall $[0, 1]$ entferne man das offene mittlere Drittel $(1/3, 2/3)$. Es bleibe die Menge

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] .$$

Aus den beiden Teilintervallen von A_1 entferne man das mittlere Drittel; der Rest ist die Menge

$$A_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

So fortfahrend, erhält man im k-ten Schritt eine Menge A_k, die eine Vereinigung von 2^k disjunkten kompakten Intervallen ist. Durch Wegnahme der mittleren Drittel dieser Teilintervalle entsteht A_{k+1}. Das Cantorsche Diskontinuum ist definiert als

$$\mathcal{C} := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Man zeige, daß $\mathcal{C}$ eine Nullmenge, aber überabzählbar ist.

Viel Spaß und viel Erfolg!

Aufgabe	1		2		3	4	5	6	
	a	b	a	b					
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	32