Übungsaufgaben zur Vorlesung
“Mathematik für Physiker II”
SS 2020

Blatt 9 (Kontraktionsprinzip)

Abgabetermin: Dienstag, den 23. Juni 2020, online auf Moodle

Aufgabe 1. Man zeige:

a) Jede kontrahierende Abbildung ist stetig.
b) Jede kontrahierende Abbildung besitzt höchstens einen Fixpunkt.

Aufgabe 2. Benutzen Sie das Fixpunktverfahren, um mit gegebener Genauigkeit alle Lösungen folgender Gleichungen zu bestimmen:

a) $x^3 + 3x - 1 = 0$ mit einer Genauigkeit von 10^{-8}.
b) $x + e^x = 0$ mit einer Genauigkeit von 10^{-5}.

Aufgabe 3. Der Goldene Schnitt $x \in (0, a)$ eines Intervalls $[0, a]$, $a > 0$, wird durch die Gleichung

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$$

definiert. Setze $y = x/a$ und schreibe die Gleichung in der Form

$$y = \frac{1}{1 + y}$$

um, wobei $y \in (0, 1)$ ist. Man wende den Banachschen Fixpunktsatz auf die Gleichung an. Man zeige, daß die Lösung der Grenzwert der Folge

$$y_0 = 1,\ y_1 = \frac{1}{2},\ y_2 = \frac{2}{3},\ y_3 = \frac{3}{5},\ y_4 = \frac{5}{8},\ y_5 = \frac{8}{13},\ y_6 = \frac{13}{21},\ \ldots$$

ist, also $y \approx 0,62$.

Beachte: Die Zahlen 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . . heißen Fibonaccische Zahlen.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß $f : [0, \pi/3] \to [0, 1] \subset [0, \pi/3]$ mit $f(x) := \cos x$ kontrahierend ist.

Aufgabe 5. Durch Auflösen der Gleichung $x^2 = y^2$ nach y entstehe eine Funktion $y = f(x)$ von $x \in \mathbb{R}$.

Wieviele Funktionen $y = f(x)$ erfüllen die Gleichung $x^2 = y^2$?

Wieviele stetige Funktionen $y = f(x)$ erfüllen die Gleichung $x^2 = y^2$?

Wieviele differenzierbare Funktionen $y = f(x)$ erfüllen die Gleichung $x^2 = y^2$?

Aufgabe 6. Beweisen Sie, daß die Abbildung $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= e^x \cos y, \\ f_2(x, y) &= e^x \sin y \end{aligned}$$

lokal invertierbar, jedoch nicht global invertierbar ist.

Viel Spaß und viel Erfolg!

Aufgabe	1		2		3	4	5	6	
	a	b	a	b					
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	32