# Übungsaufgaben zur Vorlesung
# "Mathematik für Physiker II"
# SS 2020

### Blatt 8 (Variationsrechnung)

Abgabetermin: Dienstag, den 16. Juni 2020, online auf Moodle

---

**Aufgabe 1.** Finden Sie die Eulerschen Gleichungen für die folgenden Variationsprobleme:

*a*) (Sturm-Liouvillesche Probleme)

$$\int_a^b \big(p(x)(y')^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y\big)\,dx \mapsto \min$$

in der Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $y(a) = A$ und $y(b) = B$.

*b*) (Minimale Rotationsfläche)

$$2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx \mapsto \min$$

in der Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $y(a) = A$ und $y(b) = B$.

**Aufgabe 2.** Verwenden Sie die Eulersche Gleichung, um eine $C^2$ Funktion $y : [1,2] \to \mathbb{R}$ mit $y(1) = 1$ und $y(2) = 2$ zu finden, die das folgende Integral minimiert:

*a*) $\displaystyle\int_1^2 \frac{(y')^2}{x}\,dx.$

*b*) $\displaystyle\int_1^2 \big((y')^2 - xy' - y\big)\,dx.$

**Aufgabe 3.** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Eulerschen Gleichung zu

$$\int_a^b \big((y')^2 - 8xy + x\big)\,dx =\mapsto \min\,.$$

**Aufgabe 4.** Zeigen Sie Beispiele für Funktionale, die keine Extrema besitzen, und für Funktionale, die unendlich viele Extrema besitzen.

**Aufgabe 5.** Im $\mathbb{R}^n$ werden stetig differenzierbare Kurven

$$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

mit $0 \le t \le 1$ betrachtet, die durch zwei vorgegebene Punkte $A$ und $B$ laufen. $x(0)$ ist $A$ und $x(1)$ ist $B$. Die Länge der Kurve von $A$ bis $B$ ist

$$L = \int_0^1 \sqrt{(x_1'(t))^2 + \ldots + (x_n'(t))^2}\, dt.$$

Gefragt wird nach Kurven minimaler Länge.

**Aufgabe 6.** Lösen Sie das einfachste Variationsproblem

$$\int_0^{\log 2} (e^{-x}(y')^2 - e^x y^2)\, dx \mapsto \min$$

in der Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen $y(x)$ auf $[0, \log 2]$ mit $y(0) = 1$ und $y(\log 2) = 2$.

Viel Spaß und viel Erfolg!

---

| Aufgabe | 1 | | 2 | | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | a | b | | | | | |
| Punkte | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 32 |