Übungsaufgaben zur Vorlesung
"Mathematik für Physiker II"
SS 2020

Blatt 7 (Lokale Extrema)

Abgabetermin: Dienstag, den 9. Juni 2020, online auf Moodle

Aufgabe 1. Bestimmen Sie Minima und Maxima folgender Funktionen:

a) $f(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$ im Quadratgebiet $Q = [-1,1] \times [-1,1]$;

b) $f(x,y) = (y-x^2)^2 - x^5$ auf der abgeschlossenen Kugel um 0 vom Radius 1.

Aufgabe 2. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

eine symmetrische (2×2)-Matrix. Weiter sei D die Determinante von A, also $D = ac - b^2$. Man zeige:

a) A ist positiv definit, falls $a > 0$ und $D > 0$, und negativ definit, falls $a < 0$ und $D > 0$.

b) A ist indefinit, falls $D < 0$.

Aufgabe 3. Es seien a und l, m, n feste positive Zahlen. Bestimmen Sie die Zerlegung $a = x + y + z$ mit positiven x, y und z derart, daß das Produkt $x^l y^m z^n$ maximal ist.

Aufgabe 4. Es seien $P_j = (a_j, b_j)$, $j = 1, \ldots, n$, feste Punkte in der Ebene und $m_1, \ldots, m_n$ feste reelle Zahlen. Man bestimme einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ derart, daß die Summe

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \left(d(P_j, P)\right)^2$$

minimal ist.

Sind $P_1, \ldots, P_n$ materielle Punkte mit Gewichten $m_1, \ldots, m_n$, so ist P der *Schwerpunkt* der mit Gewichten $m_1, \ldots, m_n$ versehenen Punkte $P_1, \ldots, P_n$.

Im Mehrdimensionalen können sich die Graphen von Funktionen ganz wunderlich verhalten.

Aufgabe 5. Man beweise: Die Funktion $f(x,y) = (1 + e^y)\cos x - ye^y$ hat unendlich viele lokale Maxima, jedoch kein lokales Minimum.

Aufgabe 6. Man zeige: Die Funktion $f(x,y) = (x-y^2)(2x-y^2)$ hat Minimum in $(0,0)$ auf jeder Geraden durch den Ursprung, jedoch kein lokales Minimum bei der Stelle $(0,0)$.

Viel Spaß und viel Erfolg!

Aufgabe	1		2		3	4	5	6	
	a	b	a	b					
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	32