Übungsaufgaben zur Vorlesung
"Mathematik für Physiker II"
SS 2020

Blatt 6 (Differenzierbarkeit im Mehrdimensionalen)

Abgabetermin: Dienstag, den 2. Juni 2020, online auf Moodle

Aufgabe 1. Die Funktion $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{falls} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Man zeige:

a) f ist (einmal) partiell differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$.
b) f ist nicht total differenzierbar im Punkt $(0,0)$.

Aufgabe 2. Die Funktion $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{falls} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Man zeige:

a) f ist überall zweimal partiell differenzierbar.
b) $\partial_x \partial_y f\,(0,0) \neq \partial_y \partial_x f\,(0,0)$.

Aufgabe 3. Sei U eine offene Menge im $\mathbb{R}^n$, $f:\ U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $a \in U$. Man finde die Gerade $\varphi(t) = a + vt$, $v \in \mathbb{R}^n$, durch a mit der Eigenschaft, daß f in a am schnellsten längs der Geraden $x = \varphi(t)$ wächst.

Aufgabe 4. Eine Funktion $f:\ \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grade $m \in \mathbb{R}$, falls

$$f(tx) = t^m\, f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $t > 0$ erfüllt ist. Beweisen Sie den folgenden Satz von Euler: Ist $f:\ \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare homogene Funktion vom Grade $m \in \mathbb{R}$, so gilt

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = m f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Seien $f_1(x), \dots, f_m(x)$ Funktionen in einer offenen Menge U im $\mathbb{R}^n$. Sie heißen abhängig, falls es eine von Null verschiedene Funktion $F(y)$ im $\mathbb{R}^m$ gibt mit

$$F(f_1(x), \dots, f_m(x)) \equiv 0$$

für alle $x \in U$.

Aufgabe 5. Seien $f_1(x), \dots, f_m(x)$ differenzierbar in U. Man zeige: Hat die Jacobi-Matrix $(\partial f_j / \partial x_k)$ Rang m in U, so sind $f_1(x), \dots, f_m(x)$ unabhängig in U.

Aufgabe 6. Man finde die Taylor-Entwicklung der Funktion $f(x,y) = x^y$ in einer Umgebung des Punktes $(1,1)$ bis einschließlich den Gliedern 2. Ordnung. Mittels der Taylor-Entwicklung berechne man $(1,02)^{1,03}$ und schätze man den Näherungsfehler ab.

Viel Spaß und viel Erfolg!

Aufgabe	1		2		3	4	5	6	
	a	b	a	b					
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	32