Übungsaufgaben zur Vorlesung
"Mathematik für Physiker II"
SS 2020

Blatt 5 (Kurven)

Abgabetermin: Dienstag, den 26. Mai 2020, online auf Moodle

Aufgabe 1. Parametrisieren Sie:

a) Die Kurve $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 9 \text{ und } y + z = 2\}$.
b) Eine Schraubenlinie (Helix) im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Länge der ebenen Kurve $x = \varphi(t)$, falls:

a) $\varphi(t) = (a \cos t, b \sin t)$ für $t \in [0, 2\pi]$ (Ellipse mit Halbachsen a und b);
b) $\varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ für $t \in [0, 2\pi]$ (Zykloide).

Es ist bemerkenswert, daß die Länge der Zykloide eine rationale Zahl ist!

Aufgabe 3. Man beweise: Es sei $\varphi : \ [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve. Dann existiert eine Parametertransformation

$$\delta : \ [c, d] \to [a, b],$$

so daß die Kurve $\psi := \varphi \circ \delta$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. für alle $s \in [c, d]$ gilt $\|\psi'(s)\| = 1$.

Ist $r = r(t)$ zweimal stetig differenzierbar, so wird durch

$$\varphi(t) := \Big(r(t) \cos t, r(t) \sin t\Big)$$

eine Kurve C parametrisiert. Man sagt dann, C sei in Polarkoordinaten gegeben.

Aufgabe 4. Welche Kurven werden durch $r = a$ (mit $a > 0$) bzw. durch $r = 2 \sin t$ beschrieben?

Aufgabe 5. Die "logarithmische Spirale" ist durch $r = e^t$ gegeben, die "archimedische Spirale" durch $r = at$. Berechnen Sie in beiden Fällen die Bogenlängefunktion.

Aufgabe 6. Man zeige, daß $\varphi : \ [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\varphi(t) := \begin{cases} \Big(t, t \cos(\pi/t)\Big), & \text{falls } \ t \in (0, 1], \\ (0, 0), & \text{falls } \ t = 0, \end{cases}$$

eine stetige Kurve ist, die nicht rektifizierbar ist.

Viel Spaß und viel Erfolg!

Aufgabe	1		2		3	4	5	6	
	a	b	a	b					
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	32