Übungsaufgaben zur Vorlesung
“Mathematik für Physiker II”
SS 2020

Blatt 4 (Fouriertransformation)

Abgabetermin: Dienstag, den 19. Mai 2020, online auf Moodle

Aufgabe 1. Finden Sie die Fouriertransformation

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\imath\xi x} f(x)\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

der Funktion $f(x)$, falls:

a) $f(x) = e^{-a|x|}$ mit $a > 0$;
b) $f(x) = xe^{-a|x|}$ mit $a > 0$.

Aufgabe 2. Man finde die Fouriertransformation der Funktionen:

a) $f(x) = e^{-ax^2}$ mit $a > 0$;
b) $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$.

Aufgabe 3. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $g(x) = f(x + a)$ mit $a \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, daß $\hat{g}(\xi) = e^{\imath a\xi}\hat{f}(\xi)$.

Aufgabe 4. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $h(x) = f(\lambda x)$ mit $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, daß

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1}{|\lambda|}\, \hat{f}\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big).$$

Aufgabe 5. Sei f eine k-mal differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$ mit $f^{(j)} \in L^1(\mathbb{R})$ für $j = 0, 1, \dots, k$. Zeigen Sie, daß

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (\imath\xi)^k\, \hat{f}(\xi)$$

gilt.

Aufgabe 6. Für integrierbare Funktionen f und g auf $\mathbb{R}$ definiert man die Faltung $f * g$ durch

$$F(x) = (f * g)\,(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) g(y)\, dy.$$

Beweisen Sie, daß $\hat{F}(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$.

Viel Spaß und viel Erfolg!

Aufgabe	1		2		3	4	5	6	
	a	b	a	b					
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	32