Übungsaufgaben zur Vorlesung
“Mathematik für Physiker II”
SS 2020

Blatt I (Exponentialabbildung)

Abgabetermin: Dienstag, den 28. April 2020, online auf Moodle

---

Aufgabe 1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ein Jordan-Kästchen vom Typ $m \times m$ zum Eigenwert λ. Man berechne:

a) A^n, $n = 2, 3$;

b) $f(A)$, wobei f eine ganze Funktion ist, d.h. f läßt sich auf ganz $\mathbb{R}$ in die Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ entwickeln.

Aufgabe 2. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Man berechne A^n für $n = 0, 1, \dots$.

b) Man berechne $\sin \pi A$, $\exp A$ und $\cos \pi A$.

Aufgabe 3. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Da man lineare Abbildungen von V addieren und zusammensetzen kann, hat es einen Sinn, ein durch

$$p(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0,$$

$c_k \in \mathbb{K}$, definiertes Polynom p auf eine lineare Abbildung anzuwenden, und zwar

$$p(A) = c_n A^n + \dots + c_1 A + c_0 I,$$

so daß $p(A) \in \mathcal{L}(V)$. Man zeige: Ist λ ein Eigenwert von A, dann ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(A)$.

Aufgabe 4. Man führe die Hauptachsentransformation für die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

durch, d.h. man bestimme eine orthogonale Matrix $T \in O(3)$, so daß $T'AT$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 5. Es seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ vertauschbare Matrizen, d.h. sie erfüllen $AB = BA$. Beweisen Sie, daß $e^A e^B = e^{A+B}$ gilt.

Beachte: Sind A und B nicht vertauschbar, so gilt die Gleichheit nicht mehr.

Aufgabe 6. Man bestimme, für welche Matrizen A ist die Gleichung

$$A = e^X$$

nach X auflösbar.

Viel Spaß und viel Erfolg!

Aufgabe	1		2		3	4	5	6	
	a	b	a	b					
Punkte	4	4	4	4	4	4	4	4	32