Mathematische Vorlesungen

Nikolai Tarkhanov

Analysis III

Institut für Mathematik
Universität Potsdam

Vorwort

Das ist Scriptum der Vorlesung, die ich im WS 2006/07 (4 + 2 h) für Studenten der Mathematik an der Universität Potsdam gehalten habe.

Potsdam
im Februar 2007

N. Tarkhanov

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Mengenalgebra

1.1 Motivation

Wozu Masse?

1.1.1 Inhaltsmessung allgemeiner Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

Siehe Fig. 1.1.

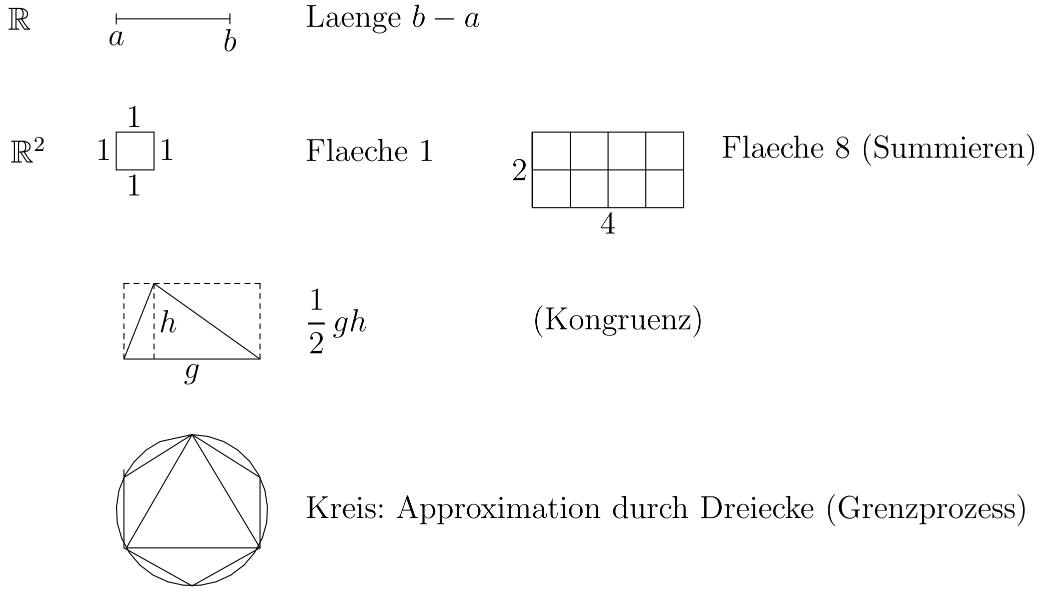


Fig. 1.1: Inhaltsmessung

Gesucht: Moeglichst grosse Klasse von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, denen sich ein Inhalt zuordnen laesst.

Inhalt bezieht sich auf eine Dimension:

Kurve Laenge ist 1-dimensionaler Begriff, Kurve ist in $\mathbb{R}^2$ (oder $\mathbb{R}^n$, $n > 2$) eingebettet.

Gekruemmte Flaeche (z.B., Kugeloberflaeche) ist 2-, 3- und mehrdimensional.

Allgemeiner: Fraktale (nichtganzzahlige Dimension im Inhaltsbegriff fordert Hausdorffmass).

Bemerkung 1.1.1 Will man einen Inhaltsbegriff haben, welcher sich hinsichtlich Summieren, Konvergenz und Grenzprozess vernuenftig erhaelt, so kann man ihn nicht fuer jede Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ definieren (Hausdorff, 1914)!

1.1.2 Wahrscheinlichkeitstheorie

Bei Wuerfeln waehlen wir $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $A \subset \mathcal{X}$. Mass von A ist die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Zahl aus A gewuerfelt wird, das ist

$$\frac{1}{6}\,\#(A)$$

(Anzahl der Elemente von A, falls der Wuerfel o.k. ist). Da (je nach Anwendung) ganz unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten auftreten, moechte man eine ganze Klasse von Massen behandeln (und nicht nur ein ganz bestimmtes, wie oben).

1.1.3 Integration

Sei $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ und $A = [a, b]$. Inhalt von $[a, b]$ ist

$$\begin{aligned} b - a &= \int_a^b 1\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[a,b]}(x)\,dx, \end{aligned}$$

mit

$$\chi_{[a,b]}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x \in [a, b], \\ 0, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R} \setminus [a, b] \end{cases}$$

(charakteristische Funktion von $[a, b]$). Fuer $A \subset \mathbb{R}^n$ definiert man

$$\text{Inhalt von } A =: \text{“}\int\text{”}\chi_A(x)\ \text{“}dx\text{”}$$

(kennen wir noch nicht). Das allgemeinere Integral

$$\int_A f(x)\, dx$$

soll darauf zurueckgefuehrt werden:

$$\int \Big(\sum_{i=1}^{N} y_i \chi_{A_i}(x)\Big) dx = \sum_{i=1}^{N} y_i \int \chi_{A_i}(x) dx$$

und ist $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, wobei jede Funktion f_n die Form

$$\sum_{i=1}^{N} y_i \chi_{A_i}$$

hat, so setzt man

$$\int_A f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, dx.$$

Integralbegriff soll so sein, dass man (moeglichst bequem und allgemein) mathematisch arbeiten kann. Das Lebesgue-Integral erfuellt diese Bedingungen.

1.1.4 Analysis

Fuer die Integration im $\mathbb{R}^n$ reicht der Standardinhalt aus. Wo wir aber schon mal dabei sind, betrachten wir gleich allgemeine (σ-endliche) Masse. Das fuehrt kaum zu zusaetzlichen Komplikationen. Masse spielen an vielen Stellen eine wichtige Rolle wegen des folgenden Sachverhalts. Ist K ein kompakter metrischer Raum (z.B., $K = [a, b]$) und ist $T : C(K) \to \mathbb{R}$ linear und stetig ($C(K)$ sei mit der Supremumsnorm versehen), so gibt es ein Mass μ mit der Eigenschaft, dass

$$T(f) = \text{Integral von } f \text{ bezueglich } \mu.$$

(Konsequenz: Bei der Untersuchung solcher Funktionale T steht die Integrationstheorie zur Verfuegung!)

1.2 Mengenalgebren

1.2.1 σ-Algebren

Wir werden Systeme von Mengen betrachten, die Teilmengen einer festen Menge $\mathcal{X}$ sind. Vom besonderen Interesse sind fuer uns die Systeme, die sich stabil bezueglich bestimmter Mengenoperationen verhalten.

Definition 1.2.1 *Sei $\mathcal{X}$ eine Menge. Ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen von $\mathcal{X}$ (d.h. $\mathcal{A} \subset \wp(\mathcal{X})$) heisst "$\sigma$-Algebra" in $\mathcal{X}$, falls gilt*

1) $\mathcal{X} \in \mathcal{A}$;

2) $A \in \mathcal{A}$ *impliziert* $\mathcal{X} \setminus A \in \mathcal{A}$;

3) $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, *impliziert* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Die $A \in \mathcal{A}$ heissen $\mathcal{A}$-messbar (oder einfach messbar, falls klar ist, welches System $\mathcal{A}$ gemeint ist).

1.2.2 Beispiele

Triviale σ-Algebra $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathcal{X}\}$ ist eine σ-Algebra.

Potenzmenge $\mathcal{A} = \wp(\mathcal{X})$ ist eine σ-Algebra.

Ruecktransport einer σ-Algebra Sei $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ eine Abbildung und $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra in $\mathcal{Y}$. Dann ist $\mathcal{A} = \{T^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ eine σ-Algebra in $\mathcal{X}$. Um dies zu zeigen, bemerken wir, dass $\mathcal{X} = T^{-1}(\mathcal{Y}) \in \mathcal{A}$. Fuer jedes $A \in \mathcal{A}$ gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $A = T^{-1}(B)$, daher

$$\begin{aligned} \mathcal{X} \setminus A &= \mathcal{X} \setminus T^{-1}(B) \\ &= T^{-1}(\mathcal{Y} \setminus B) \\ &\in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Schliesslich ist $A_n \in \mathcal{A}$ fuer alle n, so gibt es $B_n \in \mathcal{B}$ mit $A_n = T^{-1}(B_n)$ und so

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(B_n) \\ &= T^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \\ &\in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

w.z.b.w.

1.2.3 Weitere Eigenschaften

Folgerung 1.2.1 *Sei $\mathcal{X}$ eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in $\mathcal{X}$. Dann gilt*

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

2) *$A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, impliziert* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Beweis. Es ist $\emptyset = \mathcal{X} \setminus \mathcal{X} \in \mathcal{A}$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n &= \mathcal{X} \setminus \Big(\mathcal{X} \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \\ &= \mathcal{X} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{X} \setminus A_n) \\ &\in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

□

1.2.4 Erzeugte σ-Algebren

Satz 1.2.1 *Sei $\mathcal{X}$ eine Menge und $\mathfrak{S} \subset \wp(\mathcal{X})$. Dann ist*

$$\sigma(\mathfrak{S}) = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \subset \wp(\mathcal{X}) \text{ eine } \sigma\text{-Algebra, } \mathfrak{S} \subset \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra in $\mathcal{X}$ mit der Eigenschaft, dass $\mathfrak{S} \subset \sigma(\mathfrak{S}) \subset \mathcal{A}$ fuer jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ mit $\mathfrak{S} \subset \mathcal{A}$.

Also ist $\sigma(\mathfrak{S})$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathfrak{S}$ umfasst. Sie heisst die "von $\mathfrak{S}$ erzeugte σ-Algebra" in $\mathcal{X}$.
Beachte: "$\cap$" ist sinnvoll, da $\wp(\mathcal{X})$ eine σ-Algebra mit $\mathfrak{S} \subset \wp(\mathcal{X})$ ist.

Beweis. $\mathcal{X} \in \sigma(\mathfrak{S})$, da $\mathcal{X} \in \mathcal{A}$ fuer alle σ-Algebren $\mathcal{A}$. Ist $A \in \sigma(\mathfrak{S})$, so gilt $A \in \mathcal{A}$ fuer alle σ-Algebren $\mathcal{A}$, welche $\mathfrak{S}$ umfassen. Daraus folgt $\mathcal{X} \setminus A \in \mathcal{A}$, also ist $\mathcal{X} \setminus A \in \sigma(\mathfrak{S})$. Genauso $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

□

1.3 Borel-Algebra

1.3.1 Borelmengen

Definition 1.3.1 *Sei $\mathcal{X}$ ein metrisher Raum, $\mathcal{O} = \{U : U \text{ offen in } \mathcal{X}\}$. Dann heisst $\sigma(\mathcal{O})$ die Borel-Algebra in $\mathcal{X}$. Die Elemente $A \in \sigma(\mathcal{O})$ heissen Borelmengen.*

Fuer $a, b \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$\begin{aligned} [a, b) &:= \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j < b_j,\ j = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

und nennen dies ein halboffenes Intervall im $\mathbb{R}^n$.

Beachte: $[a, b) = \emptyset$, falls $a_j \geq b_j$ fuer ein j!

Wir bezeichnen mit $\mathcal{I}^n = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}^n\}$ die Menge aller halboffenen Intervalle im $\mathbb{R}^n$.

Analog schreiben wir $\mathcal{O}^n$, $\mathcal{A}^n$, $\mathcal{K}^n$ fuer die Menge aller offenen (abgeschlossenen, kompakten) Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Satz 1.3.1 *Es gilt*

$$\sigma(\mathcal{I}^n) = \sigma(\mathcal{O}^n) = \sigma(\mathcal{A}^n) = \sigma(\mathcal{K}^n),$$

d.h. die Borel-Algebra wird auch von den halboffenen Intervallen bzw. von den abgeschlossenen Mengen bzw. von den kompakten Mengen erzeugt.

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^n = \{A : \mathbb{R}^n \setminus A \text{ offen}\} \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{A}^n \subset \sigma(\mathcal{O}^n) \\ &\Rightarrow \quad \sigma(\mathcal{A}^n) \subset \sigma(\mathcal{O}^n). \end{aligned}$$

Genauso zeigt man, dass $\sigma(\mathcal{O}^n) \subset \sigma(\mathcal{A}^n)$.

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^n \subset \mathcal{A}^n \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{K}^n \subset \sigma(\mathcal{A}^n) \\ &\Rightarrow \quad \sigma(\mathcal{K}^n) \subset \sigma(\mathcal{A}^n). \end{aligned}$$

Umgekehrt: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Dann gilt

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n,$$

mit $K_n := A \cap \{x : |x| \leq n\}$ kompakt. Also ist $A \in \sigma(\mathcal{K}^n)$, d.h. $\mathcal{A}^n \subset \sigma(\mathcal{K}^n)$, daher $\sigma(\mathcal{A}^n) \subset \sigma(\mathcal{K}^n)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\sigma(\mathcal{I}^n) = \sigma(\mathcal{O}^n)$. Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\begin{aligned} [a, b) &= \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j) \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k, \end{aligned}$$

mit

$$I_k = \prod_{j=1}^{n} \Big(a_j - \frac{1}{k}, b_j\Big).$$

Jedes Intervall I_k ist offen, also $[a,b) \in \sigma(\mathcal{O}^n)$ und folglich $\sigma(\mathcal{I}^n) \subset \sigma(\mathcal{O}^n)$. Umgekehrt:

$$\begin{aligned}(a,b) &= \prod_{j=1}^{n}(a_j,b_j) \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,\end{aligned}$$

mit

$$I_k = \prod_{j=1}^{n}\Big[a_j + \frac{1}{k}, b_j\Big).$$

Also gilt $(a,b) \in \sigma(\mathcal{I}^n)$ fuer jedes offenes Intervall (a,b) im $\mathbb{R}^n$. Da jede offene Menge im $\mathbb{R}^n$ sich als abzaehlbare Vereinigung von offenen Intervallen darstellen laesst (Uebungsaufgabe!), folgt $\mathcal{O}^n \subset \sigma(\mathcal{I}^n)$, also ist $\sigma(\mathcal{O}^n) \subset \sigma(\mathcal{I}^n)$, w.z.b.w.

$\square$

1.3.2 Bemerkungen

Satz 1.3.1 zeigt, dass die Borel-Algebra im $\mathbb{R}^n$ ein ziemlich kanonisches Objekt ist.

Analogie: Sei $\mathfrak{S}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen mit LH($\mathfrak{S}$) die lineare Huelle von $\mathfrak{S}$, d.h.

$$\begin{aligned}\mathrm{LH}(\mathfrak{S}) &= \bigcap \{U : U \text{ Untervektorraum von } \mathbb{R}^n,\ \mathfrak{S} \subset U\} \\ &= \text{der kleinste Untervektorraum von } \mathbb{R}^n, \text{ welcher } \mathfrak{S} \text{ enthaelt.}\end{aligned}$$

Untervektorraeme des $\mathbb{R}^n$ lassen sich ueber Basen oder lineare Abbildungen sehr gut beschreiben.

Im Gegensatz dazu laesst sich die Borel-Algebra $\sigma(\mathcal{O}^n)$ nicht einfach beschreiben, etwa in der Form

$$A \in \sigma(\mathcal{O}^n) \Leftrightarrow A \text{ hat die Eigenschaften 1), 2), 3), \ldots}$$

(wobei 1), 2), 3), ... gut handhabbar sind).

1.4 Ringe

1.4.1 Mass

Definition 1.4.1 *Sei $\mathcal{X}$ eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ heisst Mass, falls gilt*

1) *$\mu(\emptyset) = 0$;*

2) *μ ist σ-additiv, d.h. es gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

fuer jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter $\mathcal{A}$-messbarer Mengen.

Beachte: Die Eigenschaft 1) ist eigentlich eine Folgerung von 2), denn $(\emptyset, \emptyset, \ldots)$ ist eine Folge paarweise disjunkter $\mathcal{A}$-messbarer Mengen, also gilt $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \ldots$.

Das Mass μ heisst endlich, falls $\mu(\mathcal{X}) < \infty$. μ heisst σ-endlich, falls es eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbarer Mengen gibt mit $\mu(A_n) < \infty$ und

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathcal{X}.$$

1.4.2 Elementarinhalt

Der n-dimensionale Elementarinhalt $\lambda(I)$ eines halboffenen Intervalls $I = [a, b)$ im $\mathbb{R}^n$ ist

$$\lambda(I) := \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$$

(Volumen des Quaders). Unser erstes grosseres Problem ist nun: Koennen wir auf der Borelalgebra $\sigma(\mathcal{O}^n)$ ein Mass definieren, das fuer die Quader deren Volumen liefert? Dieses Problem wird vom sogenannten Masserweiterungssatz positiv geloest. Hierfuer sind jedoch eine Reihe vorbereitender Betrachtungen noetig.

1.4.3 Begriff des Ringes

Definition 1.4.2 *Sei $\mathcal{X}$ eine Menge. Ein System $\mathcal{R}$ von Teilmengen von $\mathcal{X}$ heisst ein "Ring" in $\mathcal{X}$, falls gilt*

1) *$\emptyset \in \mathcal{R}$;*

2) *$A, B \in \mathcal{R}$ impliziert $A \setminus B \in \mathcal{R}$;*

3) *$A, B \in \mathcal{R}$ impliziert $A \cup B \in \mathcal{R}$.*

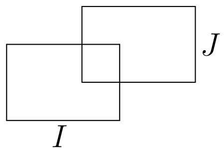
Es folgt dann $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$, da $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

Beispiel 1.4.1 Jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist ein Ring. Denn $A \setminus B = A \cap (\mathcal{X} \setminus B)$ ist in $\mathcal{A}$ fuer alle $A, B \in \mathcal{A}$. Fuer 3) setze man $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_n = \emptyset$ fuer $n > 2$, dann ist

$$A \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

1.4.4 Figuren

Die Menge $\mathcal{I}^n$ aller halboffenen Intervalle ist kein Ring, siehe Fig. 1.2.



Weder $I \cup J$ noch $I \setminus J$ ist ein halboffenes Intervall.

Fig. 1.2: Figur

Wir koennen aber I und J partitionieren, und danach sowohl $I \cup J$ als auch $I \setminus J$ als endliche Vereinigung halboffener Intervalle darstellen, siehe Fig. 1.3.

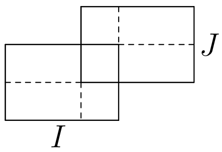


Fig. 1.3: Partition

Diese Beobachtung gibt Anlass zur folgenden Definition.

Definition 1.4.3 *Ein $F \subset \mathbb{R}^n$ heisst "Figur", falls F sich als endliche Vereinigung von halboffenen Intervallen schreiben laesst.*

Wir setzen

$$\mathcal{F}^n := \{F : F \subset \mathbb{R}^n,\ F \text{ ist Figur}\}.$$

Lemma 1.4.1 *Seien $I, J \in \mathcal{I}^n$. Dann ist auch $I \cap J \in \mathcal{I}^n$, und $I \setminus J$ laesst sich als disjunkte endliche Vereinigung von halboffenen Intervallen schreiben; insbesondere ist $I \setminus J \in \mathcal{F}^n$.*

Beweis. Sei $I = [a, b),\ J = [c, d)$.

I Es ist $I \cap J = [l, r) \in \mathcal{I}^n$, mit $l_j = \max\{a_j, c_j\}$ und $r_j = \min\{b_j, d_j\}$ fuer $j = 1, \ldots, n$.

II Wegen $I \setminus J = I \setminus (I \cap J)$ und **I** genuegt es, den Fall $J \subset I$ zu betrachten. Es ist dann entweder $J = \emptyset$ oder $a_j \leq c_j < d_j \leq b_j$ fuer alle $j = 1, \ldots, n$. $I \setminus J$ ist disjunkte Vereinigung von Intervallen der Form

$$\prod_{j=1}^{n} [l_j, r_j),$$

$[l_j, r_j) = [a_j, c_j)$ oder $[c_j, d_j)$ oder $[d_j, b_j)$, wobei alle moeglichen Kombinationen durchlaufen werden (bis auf die, die J liefert).

$\square$

Satz 1.4.1

1) *$\mathcal{F}^n$ ist ein Ring im $\mathbb{R}^n$;*

2) *Jedes $F \in \mathcal{F}^n$ laesst sich als disjunkte endliche Vereinigung von halboffenen Intervallen schreiben.*

Beweis.

I $F, G \in \mathcal{F}^n$ impliziert $F \cup G \in \mathcal{F}^n$, wie es direkt aus Definition folgt.

II Zeigen wir, dass $F \cap G \in \mathcal{F}^n$ und $F \setminus G \in \mathcal{F}^n$ fuer alle $F, G \in \mathcal{F}^n$ gilt. Seien

$$\begin{aligned} F &= \bigcup_{k=1}^{K} I_k, \\ G &= \bigcup_{l=1}^{L} J_l \end{aligned}$$

mit $I_k, J_l \in \mathcal{I}^n$. Dann folgt

$$F \cap G = \bigcup_{k,l} I_k \cap J_l,$$

und $I_k \cap J_l \in \mathcal{I}^n$ nach Lemma 1.4.1, also $F \cap G \in \mathcal{F}^n$.

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} F \setminus G &= \Big(\bigcup_k I_k\Big) \setminus \Big(\bigcup_l J_l\Big) \\ &= \Big(\bigcup_k I_k\Big) \cap \Big(\mathbb{R}^n \setminus \Big(\bigcup_l J_l\Big)\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{de Morgan}}{=} && \Big(\bigcup_k I_k\Big) \cap \Big(\bigcap_l (\mathbb{R}^n \setminus J_l)\Big) \\
&= && \bigcup_k \bigcap_l (I_k \cap (\mathbb{R}^n \setminus J_l)) \\
&= && \bigcup_k \bigcap_l (I_k \setminus J_l).
\end{aligned}
$$

Nun ist $I_k \setminus J_l \in \mathcal{F}^n$ nach Lemma 1.4.1, also

$$\bigcap_{l=1}^{L} (I_k \setminus J_l) \in \mathcal{F}^n$$

(eben bewiesen), also $F \setminus G \in \mathcal{F}^n$ nach **I**. Damit ist die Aussage 1) bewiesen.

III Seien F, G wie in **II**, aber

$$F = \bigsqcup_{k=1}^{K} I_k, \quad G = \bigsqcup_{l=1}^{L} J_l$$

(disjunkte Vereinigung!). Dann ist auch

$$F \cap G = \bigsqcup_{k,l} (I_k \cap J_l).$$

IV Sei $F = \bigcup_{k=1}^{K} I_k$. Es ist dann

$$
\begin{aligned}
F &= I_1 \sqcup (I_2 \setminus I_1) \sqcup (I_3 \setminus (I_1 \cup I_2)) \sqcup \dots \\
&= \bigsqcup_k \bigcap_{l=1}^{k-1} (I_k \setminus I_l).
\end{aligned}
$$

Nach Lemma 1.4.1 lassen sich alle $I_k \setminus I_l$ als disjunkte Vereinigungen halboffener Intervalle darstellen, also auch fuer jedes k

$$\bigcap_{l=1}^{k-1} (I_k \setminus I_l)$$

(nach **III**). Damit ist auch 2) bewiesen.

$\square$

Kapitel 2

Masstheorie

2.1 Mengenfunktionen

2.1.1 Endlich-additive Mengenfunktionen

Definition 2.1.1 *Sei $\mathcal{X}$ eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring in $\mathcal{X}$. Eine Funktion $\mu : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ heisst "endlich-additiv", falls gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i)$$

fuer jedes endliche System $A_1, \ldots, A_N$ paarweise disjunkter Mengen $A_i \in \mathcal{R}$.

2.1.2 Fortsetzung des Elementarinhalts

Satz 2.1.1 *Der n-dimensionale Elementarinhalt*

$$\lambda(I) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j),$$

$I = [a, b) \in \mathcal{I}^n$, laesst sich auf genau eine Weise zu einer endlich-additiven Funktion $\lambda : \mathcal{F}^n \to [0, \infty)$ fortsetzen.

Beweis.
I Wird $I = [a, b)$ durch eine Hyperebene $x_j = c \in [a_j, b_j)$ in 2 Teile

$$\begin{aligned} I_1 &= [(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_{j-1}, c, b_{j+1}, \ldots, b_n)), \\ I_2 &= [(a_1, \ldots, a_{j-1}, c, a_{j+1}, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)) \end{aligned}$$

zerschnitten, siehe Fig. 2.1, so gilt

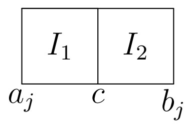


Fig. 2.1: Zerlegung

$$\begin{aligned}
\lambda(I) &= \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \\
&= ((b_j - c) + (c - a_j)) \prod_{k \neq j}(b_k - a_k) \\
&= \lambda(I_1) + \lambda(I_2)
\end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$\lambda(I) = \sum_{i=1}^{N} \lambda(I_i),$$

falls ein Intervall I durch endlich viele Hyperebenen in N Teilintervalle $I_i \in \mathcal{I}^n$ zerschnitten wird.

II Beweisen wir, dass λ endlich-additiv auf $\mathcal{I}^n$ ist. Sei $I = [a, b) \in \mathcal{I}^n$ dargestellt als disjunkte Vereinigung, etwa

$$I = \bigsqcup_{i=1}^{N} I_i$$

mit $I_i = [a^i, b^i) \in \mathcal{I}^n$. Wir zerschneiden I durch alle Hyperebenen der Form $x_j = a^i_j$, $x_j = b^i_j$, wobei $1 \leq i \leq N$ und $1 \leq j \leq n$ ist. Dadurch wird I in endlich viele Teilintervalle zerlegt. Diejenigen, welche in I_i enthalten sind, bilden eine disjunkte Zerlegung $I_{i,k}$, $1 \leq k \leq N_i$, von I_i durch zerschneiden. Nach **I** gilt dann

$$\begin{aligned}
\lambda(I) &= \sum_{i,k} \lambda(I_{i,k}) \\
&= \sum_{i} \sum_{k} \lambda(I_{i,k}) \\
&= \sum_{i} \lambda(I_i).
\end{aligned}$$

III Sei $F \in \mathcal{F}^n$. Nach dem Satz 1.4.1 gibt es paarweise disjunkte Intervalle I_i, $1 \leq i \leq N$, mit $F = \bigsqcup I_i$. Wir setzen

$$\lambda(F) := \sum_{i=1}^{N} \lambda(I_i).$$

Diese Definition ist von der Wahl der I_i unabhaengig, denn ist $F = \bigsqcup_{j=1}^{M} J_j$, $J_j \in \mathcal{I}^n$, so gilt

$$I_i = \bigsqcup_{j=1}^{M} (I_i \cap J_j)\,, \quad J_j = \bigsqcup_{i=1}^{N} (I_i \cap J_j)\,,$$

also nach **II**

$$\begin{aligned} \sum_i \lambda(I_i) &= \sum_i \sum_j \lambda(I_i \cap J_j) \\ &= \sum_j \lambda(J_j). \end{aligned}$$

IV Letztendlich zeigen wir, dass λ endlich-additiv auf dem Ring $\mathcal{F}^n$ ist. Ist also

$$F = \bigsqcup_{i=1}^{N} F_i$$

mit $F_i \in \mathcal{F}^n$, so waehle Zerlegungen $F_i = \bigsqcup_j I_{i,j}$ mit endlich vielen $I_{i,j} \in \mathcal{I}^n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \lambda(F) &= \sum_{i,j} \lambda(I_{i,j}) \\ &= \sum_i \sum_j \lambda(I_{i,j}) \\ &= \sum_i \lambda(F_i). \end{aligned}$$

□

2.1.3 σ-additive Mengenfunktionen

Sei $\mathcal{X}$ eine Menge, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $M_n \subset \mathcal{X}$, und $M \subset \mathcal{X}$. Wir schreiben

$$M_n \searrow M, \quad \text{falls } M_1 \supset M_2 \supset \ldots \text{ und } \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n = M;$$

$$M_n \nearrow M, \quad \text{falls } M_1 \subset M_2 \subset \ldots \text{ und } \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = M.$$

Definition 2.1.2 *Analog zu Definition 1.4.1 heisst $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ "σ-additiv" auf dem Ring $\mathcal{R}$, falls gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

fuer jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{R}$ mit $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$.

Lemma 2.1.1 *Seien $\mathcal{X}$ eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring in $\mathcal{X}$, $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty)$. Es gelte:*

1) *μ ist endlich-additiv;*

2) *$\lim\limits_{n\to\infty} \mu(M_n) = 0$ fuer jede Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{R}$ mit $M_n \searrow \emptyset$.*

Dann ist μ σ-additiv auf $\mathcal{R}$.

Beweis. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{R}$ mit

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}.$$

Wir setzen $M_n := A \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Dann gilt $M_n \searrow \emptyset$ und

$$\mu(A) \overset{\text{nach 1)}}{=} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) + \mu(M_n),$$

also

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

wegen 2).

□

2.2 Rechenregel

2.2.1 Rechnen mit Unendlichkeit

Im folgenden werden wir vielfach mit "Funktionen" zu tun haben, deren Wertebereich nicht $\mathbb{R}$, sondern $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ oder z.B. $[0, +\infty]$ ist. Um mit solchen Funktionen bequem rechnen zu koennen und Fallunterscheidungen zu vermeiden, fuehren wir nun Rechenregeln fuer das Rechnen mit $+\infty$ und $-\infty$ ein. Wir vereinbaren:

1) $a + \infty := \infty$, falls $a \in \mathbb{R}$ oder $a = +\infty$;

2) $a - \infty := -\infty$, falls $a \in \mathbb{R}$ oder $a = -\infty$;

3) $$a \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & \text{falls} \quad a \in (0, \infty]; \\ 0, & \text{falls} \quad a = 0; \\ -\infty, & \text{falls} \quad a \in [-\infty, 0); \end{cases}$$

4) $a \cdot (-\infty) := (-a) \cdot \infty$, $\infty \cdot a := a \cdot \infty$.

Beachte: Die Ausdruecke "$\infty - \infty$" und "$-\infty + \infty$" sind nicht definiert!

Wir leiten jetzt vernuenftige Rechenregeln fuer endlich-additive Funktionen $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ her.

2.2.2 Rechenregel

Satz 2.2.1 *Sei $\mathcal{X}$ eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring auf $\mathcal{X}$ und $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ endlich-additiv. Dann gilt (alle A, B, A_n als Elemente von $\mathcal{R}$ vorausgesetzt):*

1) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$;

2) $A \subset B$ *impliziert* $\mu(A) \leq \mu(B)$;

3) $A \subset B$, $\mu(A) < \infty$ *impliziert* $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;

4) $\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$.

Ist μ σ-additiv, so gilt

5) $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *impliziert* $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

6) $\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, *falls* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ *(z.B., falls $\mathcal{R}$ eine σ-Algebra ist).*

Beweis.

$$\begin{array}{rclcrcrcl} A \cup B &=& A \sqcup (B \setminus A) & \Rightarrow & \mu(A \cup B) &=& \mu(A) &+& \mu(B \setminus A), \\ B &=& (A \cap B) \sqcup (B \setminus A) & \Rightarrow & \mu(B) &=& \mu(A \cap B) &+& \mu(B \setminus A) \end{array}$$

liefert 1)

Sei nun $A \subset B$. Dann ist $B = A \sqcup (B \setminus A)$, daher $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$, also folgen 2) und 3).

Um 4) zu beweisen, bemerken wir, dass mit $B_n := A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ gilt $B_n \subset A_n$ und

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{N} B_n,$$

also

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n) \le \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n).$$

Mit B_n wie oben gilt

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap A_n) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty}(A \cap B_n),$$

also

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap B_n) \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \end{aligned}$$

da $A \cap B_n \subset A_n$. Das liefert 5).

□

2.2.3 σ-Additivitaet des Elementarinhalts

Satz 2.2.2 *Die Fortsetzung $\lambda : \mathcal{F}^n \to [0, \infty)$ des Elementarinhalts*

$$\lambda([a, b)) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$$

ist σ -additiv.

Beweis.

I Wegen Satz 2.1.1 und Lemma 2.1.1 genuegt es zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(F_n) = 0$$

fuer jede Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Figuren $F_n \in \mathcal{F}^n$ mit $F_n \searrow \emptyset$ ist. Dazu genuegt es zu zeigen: Ist $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $F_n \in \mathcal{F}^n$ fallend, d.h. $F_n \supset F_{n+1}$ fuer alle n ist, und gilt

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(F_n) = L > 0$$

(der Limes existiert immer, da $\lambda(F_n) \geq \lambda(F_{n+1})$ fuer jedes n ist), so ist

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

Wir verwenden ein Kompaktheitsargument.

II Waehle $G_n \in \mathcal{F}^n$ mit $\bar{G}_n \subset F_n$ und $\lambda(F_n) - \lambda(G_n) \leq 2^{-n}L$. (Dies ist moeglich: F_n ist endliche paarweise disjunkte Vereinigung von Intervallen $I_1, \ldots, I_N$, mit $I_i = [a^i, b^i)$. Verkleinere jedes I_i zu einem $[a^i, b^i - (\varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_i))$ mit $\varepsilon_i > 0$ klein genug.) Setze

$$H_n := \bigcap_{k=1}^{n} G_k.$$

Dann gilt $H_{n+1} \subset H_n$ und $\bar{H}_n \subset F_n$.

(Schritt **II** ist nur deshalb noetig, weil F_n nicht abgeschlossen ist.)

III Es genuegt zu zeigen, dass $\lambda(H_n) > 0$ fuer jedes n ist. Denn ist $\lambda(H_n)$ positiv fuer alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $H_n \neq \emptyset$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$, da $\lambda(\emptyset) = 0$. Daraus folgt, dass das System $(\bar{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die "endliche Durchschnittseigenschaft" hat, d.h.

$$\begin{aligned} \bigcap_{n \in \mathcal{N}} \bar{H}_n &= \bar{H}_{\max\{n \in \mathcal{N}\}} \\ &\neq \emptyset \end{aligned}$$

fuer alle endlichen Indexmengen $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$. Daher ist

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{H}_n \neq \emptyset$$

(Uebungsaufgabe; alle $\bar{H}_n$ sind kompakt, da alle Figuren beschraenkt sind), also

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset.$$

IV Wir zeigen mit vollstaendiger Induktion, dass

$$\begin{aligned} \lambda(H_n) &\geq \lambda(F_n) - (1 - 2^{-n})L \\ &\overset{\text{da } \lambda(F_n) \geq L}{\geq} 2^{-n}L \\ &> 0 \end{aligned}$$

gilt.

$\boxed{n = 1}$ $\lambda(H_1) = \lambda(G_1) \geq \lambda(F_1) - 2^{-1}L$ (Wahl von G_1);

$\boxed{n \mapsto n+1}$ $H_{n+1} = G_{n+1} \cap H_n$, also ist nach Satz 2.2.1, 1),

$$\begin{array}{lll} \lambda(H_{n+1}) & & \\ & = & \lambda(G_{n+1}) + \lambda(H_n) - \lambda(G_{n+1} \cup H_n) \\ & \stackrel{\text{da } G_{n+1} \cup H_n \subset F_n}{\geq} & \lambda(F_{n+1}) - 2^{-n-1}L + \lambda(F_n) - (1 - 2^{-n})L - \lambda(F_n) \\ & = & \lambda(F_{n+1}) - (1 - 2^{-n-1})L. \end{array}$$

□

2.2.4 Dynkin-Systeme

Bis jetzt koennen wir nur $\lambda(F)$, F eine Figur, ausrechnen. (Das geht auch ohne Masstheorie!) Wir haben aber strukturelle Vorarbeit geleistet, indem wir nun wissen, dass $\mathcal{F}^n$ ein Ring, $\lambda : \mathcal{F}^n \to [0, \infty)$ σ-additiv ist. Als letzte Vorbereitung fuer den Masserweiterungssatz (genauer: um den Beweis der Eindeutigkeit zu erleichtern), fuehren wir noch den Begriff des “Dynkin-Systems” ein.

Definition 2.2.1 *Sei $\mathcal{X}$ eine Menge. Ein System $\mathcal{D}$ von Teilmengen von $\mathcal{X}$ heisst “Dynkin-System”, falls gilt:*

1) $\mathcal{X} \in \mathcal{D}$;

2) $A \in \mathcal{D}$ *impliziert* $\mathcal{X} \setminus A \in \mathcal{D}$;

3) “$A_n \in \mathcal{D}$, $n \in \mathbb{N}$, *paarweise disjunkt” impliziert* $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

Offensichtlich ist jede σ-Algebra ein Dynkin-System.

Lemma 2.2.1 *Sei $\mathcal{X}$ eine Menge und $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System in $\mathcal{X}$. Sind $A, B \in \mathcal{D}$ mit $A \subset B$, so gilt $B \setminus A \in \mathcal{D}$.*

Beweis. Es ist

$$\begin{array}{lll} B \setminus A & = & \mathcal{X} \setminus (A \cup (\mathcal{X} \setminus B)) \\ & \stackrel{\text{da } A \subset B}{=} & \mathcal{X} \setminus (A \sqcup (\mathcal{X} \setminus B)) \\ & \in & \mathcal{D}. \end{array}$$

□

Satz 2.2.3 *Sei $\mathfrak{S} \subset \wp(\mathcal{X})$ ein Mengensystem in $\mathcal{X}$, sei $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System mit $\mathfrak{S} \subset \mathcal{D} \subset \sigma(\mathfrak{S})$. Ist $\mathfrak{S}$ $\cap$-stabil, d.h. gilt $A \cap B \in \mathfrak{S}$ fuer alle $A, B \in \mathfrak{S}$, so ist $\mathcal{D} = \sigma(\mathfrak{S})$.*

Beweis.

I Sei $\delta(\mathfrak{S})$ das "von $\mathfrak{S}$ erzeugte Dynkin-System", d.h.

$$\delta(\mathfrak{S}) = \bigcap \{\mathcal{D} : \mathcal{D} \text{ ein Dynkin-System in } \mathcal{X},\, \mathfrak{S} \subset \mathcal{D}\}$$

(wie in Satz 1.2.1 beweist man, dass $\delta(\mathfrak{S})$ ein Dynkin-System ist). Es ist dann $\delta(\mathfrak{S}) \subset \mathcal{D} \subset \sigma(\mathfrak{S})$. Es genuegt zu zeigen, dass $\delta(\mathfrak{S})$ eine σ-Algebra ist (denn daraus folgt, dass $\sigma(\mathfrak{S}) \subset \delta(\mathfrak{S})$, also $\delta(\mathfrak{S}) = \mathcal{D} = \sigma(\mathfrak{S})$).

II Fuer $B \in \delta(\mathfrak{S})$ definieren wir

$$\mathcal{D}_B = \{A : A \subset \mathcal{X},\, A \cap B \in \delta(\mathfrak{S})\}.$$

$\mathcal{D}_B$ ist ein Dynkin-System: $\mathcal{X} \in \mathcal{D}_B$ ist klar. Ist $A \in \mathcal{D}_B$, so gilt

$$\begin{aligned} (\mathcal{X} \setminus A) \cap B &= B \setminus A \\ &= B \setminus (A \cap B) \\ &\in \delta(\mathfrak{S}), \end{aligned}$$

daher $\mathcal{X} \setminus A \in \mathcal{D}_B$, d.h. 2) gilt. Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt, $A_n \in \mathcal{D}_B$. Dann

$$\begin{aligned} \Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \cap B &= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B) \\ &\in \delta(\mathfrak{S}), \end{aligned}$$

da $A_n \cap B \in \delta(\mathfrak{S})$ und $\delta(\mathfrak{S})$ ein Dynkin-System ist. Also ist

$$\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}_B.$$

III Ist $A \in \delta(\mathfrak{S})$ und $B \in \mathfrak{S}$, so gilt $A \cap B \in \delta(\mathfrak{S})$. Um dies zu beweisen, bemerken wir, dass $\mathfrak{S} \subset \mathcal{D}_B$ ist. (Denn ist $M \in \mathfrak{S}$, so ist $M \cap B \in \mathfrak{S}$ nach Voraussetzung, das liefert $M \in \mathcal{D}_B$, da $\mathfrak{S} \subset \delta(\mathfrak{S})$ ist.) Also ist $\delta(\mathfrak{S}) \subset \mathcal{D}_B$ (wegen **I**, **II**), daher $A \cap B \in \delta(\mathfrak{S})$.

IV Zeigen wir, dass $A \cap B \in \delta(\mathfrak{S})$ fuer alle $A, B \in \delta(\mathfrak{S})$ erfuellt ist. Es ist $\mathfrak{S} \subset \mathcal{D}_B$ (nach **III**), also $\delta(\mathfrak{S}) \subset \mathcal{D}_B$ (wegen **I**, **II**), also $A \cap B \in \delta(\mathfrak{S})$.

V Schliesslich beweisen wir, dass $\delta(\mathfrak{S})$ eine σ-Algebra ist. Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n \in \delta(\mathfrak{S})$, gegeben. Wir setzen $B_0 := \emptyset$ und

$$B_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

fuer $n = 1, 2, \ldots$. Dann ist $B_0 \in \delta(\mathfrak{S})$ und (Induktion ueber n)

$$\begin{aligned} B_n &= (A_n \setminus B_{n-1}) \sqcup B_{n-1} \\ &= (A_n \setminus (A_n \cap B_{n-1})) \sqcup B_{n-1} \\ &\in \delta(\mathfrak{S}) \end{aligned}$$

nach **IV** und Lemma 2.2.1, also auch

$$\begin{aligned}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n &= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \setminus B_{n-1}) \\ &\in \delta(\mathfrak{S}).\end{aligned}$$

□

Um ein Mengensystem $\mathcal{D}$ als σ-Algebra zu "entlarven", muessen wir die Bedingung

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$$

nur fuer paarweise disjunkte (A_n) nachrechnen, falls wir uns im Setting vom Satz 2.2.3 befinden. Das ist der Sinn des Satzes.

2.3 Masserweiterungssatz

2.3.1 Existenz

Satz 2.3.1 *Sei $\mathcal{X}$ eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring in $\mathcal{X}$, $\mu : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ eine σ-additive Mengenfunktion mit $\mu(\emptyset) = 0$. Dann kann μ zu einem Mass auf $\sigma(\mathcal{R})$ fortgesetzt werden.*

Beweis. "Etwas laenger". Beweisstrategie:

1) Fortsetzung zu einem "aeusseren Mass" $\mu^* : \wp(\mathcal{X}) \to [0,\infty]$ (wobei Masseigenschaften teilweise verloren gehen);

2) Beweis, dass die Einschraenkung von μ^* auf $\sigma(\mathcal{R})$ ein Mass ist.

1) **Fortsetzung auf $\wp(\mathcal{X})$:**
I Sei $M \subset \mathcal{X}$ beliebig. Wir definieren

$$\mathcal{U}(M) := \Big\{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} : A_n \in \mathcal{R},\, M \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big\}$$

(die Menge aller abzaehlbaren Ueberdeckungen von M mit Mengen aus $\mathcal{R}$) und das sogenannte "aeussere Mass" $\mu^* : \wp(\mathcal{X}) \to [0,\infty]$ durch

$$\mu^*(M) := \begin{cases} \inf\limits_{(A_n)\in\mathcal{U}(A)} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), & \text{falls } \mathcal{U}(M) \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{falls } \mathcal{U}(M) = \emptyset. \end{cases}$$

II $\mu^*(M) \geq 0$ fuer alle $M \in \wp(\mathcal{X})$: klar.

III $\mu^* : \wp(\mathcal{X}) \to [0,\infty]$ ist Fortsetzung von μ. Um dies zu zeigen, sei $A \in \mathcal{R}$. Es ist

a) $\mu^*(A) \leq \mu(A)$, da $(A, \emptyset, \emptyset, \ldots) \in \mathcal{U}(A)$.

b) $\mu^*(A) \geq \mu(A)$: Sei $(A_n) \in \mathcal{U}(A)$. Aus Satz 2.2.1, 5) folgt

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(σ-Additivitaet!).

Also ist $\mu^*(A) = \mu(A)$ fuer alle $A \in \mathcal{R}$.

IV $\mu^*(\emptyset) = 0$, da $(\emptyset, \emptyset, \ldots) \in \mathcal{U}(A)$ und $\mu(\emptyset) = 0$.

V Ist $M_1 \subset M_2$, so ist $\mu^*(M_1) \leq \mu^*(M_2)$, da $\mathcal{U}(M_2) \subset \mathcal{U}(M_1)$.

VI Zeigen wir, dass

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(M_n)$$

gilt. Sei $\mathcal{U}(M_n) \neq \emptyset$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$ (sonst ist die rechte Seite gleich $+\infty$). Sei $\varepsilon > 0$. Sei $(A_{n,k})_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(M_n)$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n,k}) \leq \mu^*(M_n) + 2^{-n}\varepsilon.$$

Dann ist

$$(A_{n,k})_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ k\in\mathbb{N}}} \in \mathcal{U}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\Big)$$

also

$$\begin{aligned}\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\Big) &\leq \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ k\in\mathbb{N}}} \mu(A_{n,k}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(M_n) + \varepsilon.\end{aligned}$$

VII Es ist $\mu^*(M) \leq \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \setminus A)$ fuer alle $A, M \in \wp(\mathcal{X})$. Dies folgt aus **VI**, angewandt auf $(M \cap A, M \setminus A, \emptyset, \emptyset, \ldots)$.

2) **Restriktion**:

Die eigentliche Idee des Existenzbeweises liegt in der Definition

$$\mathcal{A} := \{A : A \subset \mathcal{X} \text{ und } \mu^*(M) = \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \setminus A) \text{ fuer alle } M \subset \wp(\mathcal{X})\}.$$

Im folgenden wird gezeigt, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra mit $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}$ ist und dass $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ ein Mass ist.

VIII Beweisen wir, dass $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ ist. Sei $A \in \mathcal{R}$, $M \in \wp(\mathcal{X})$ beliebig. Zu zeigen ist wegen **VII**, dass $\mu^*(M) \geq \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \setminus A)$ erfuellt ist. Sei $\mathcal{U}(M) \neq \emptyset$ (sonst $\mu^*(M) = +\infty$). Sei $(A_n) \in \mathcal{U}(M)$ beliebig. Dann gilt $\mu(A_n) = \mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \setminus A)$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A),$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \setminus A),$$

da $(A_n \cap A) \in \mathcal{U}(M \cap A)$ und $(A_n \setminus A) \in \mathcal{U}(M \setminus A)$ ist. Uebergang zum Infimum liefert $\mu^*(M) \geq \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \setminus A)$.

IX $\mathcal{X} \in \mathcal{A}$: klar nach Definition, da $\mu^*(\emptyset) = 0$ ist.

X Ist $A \in \mathcal{A}$, so ist $\mathcal{X} \setminus A \in \mathcal{A}$. Das ist klar, da $M \setminus A = M \cap (\mathcal{X} \setminus A)$ und $M \cap A = M \setminus (\mathcal{X} \setminus A)$ ist.

XI Zeigen wir, dass $A \cup B \in \mathcal{A}$ fuer alle $A, B \in \mathcal{A}$ ist. Es gilt fuer alle $M \in \wp(\mathcal{X})$

$$\begin{aligned} \mu^*(M) &\overset{A\in\mathcal{A}}{=} \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap (\mathcal{X} \setminus A)) \\ &\overset{B\in\mathcal{A}}{=} \mu^*(M \cap A \cap B) + \mu^*(M \cap A \cap (\mathcal{X} \setminus B)) \\ &+ \mu^*(M \cap (\mathcal{X} \setminus A) \cap B) + \mu^*(M \cap (\mathcal{X} \setminus A) \cap (\mathcal{X} \setminus B)). \end{aligned}$$

Setzen wir $M \cap (A \cup B)$ fuer M ein, so gilt fuer alle $M \in \wp(\mathcal{X})$

$$\mu^*(M \cap (A \cup B)) = \mu^*(M \cap A \cap B) + \mu^*(M \cap A \cap (\mathcal{X} \setminus B)) + \mu^*(M \cap (\mathcal{X} \setminus A) \cap B) \tag{2.3.1}$$

(Distributivgesetz verwenden). Also ist

$$\mu^*(M) = \mu^*(M \cap (A \cup B)) + \mu^*(M \cap (\mathcal{X} \setminus (A \cup B)))$$

fuer alle $M \in \wp(\mathcal{X})$, und damit $A \cup B \in \mathcal{A}$.

XII Ist $A, B \in \mathcal{A}$, so gilt $A \cap B \in \mathcal{A}$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$. Dies folgt aus **X** und **XI**, denn $A \cap B = \mathcal{X} \setminus ((\mathcal{X} \setminus A) \cup (\mathcal{X} \setminus B))$ und $A \setminus B = A \cap (\mathcal{X} \setminus B)$.

XIII Sind $A, B \in \mathcal{A}$ disjunkt, so gilt $A \in \mathcal{X} \setminus B$ und $B \in \mathcal{X} \setminus A$, also folgt aus (2.3.1), dass

$$\mu^*(M \cap (A \cup B)) = \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap B)$$

fuer alle $M \in \wp(\mathcal{X})$.

XIV Ist (A_n) eine Folge in $\mathcal{A}$ und sind A_n paarweise disjunkt, so gilt

$$\begin{aligned} A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad &\in \quad \mathcal{A}, \\ \mu^*(A) \quad &= \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \end{aligned}$$

Denn nach **XI** ist $\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wenden **XIII** (n-1) mal an und erhalten

$$\mu^*\Big(M \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(M \cap A_k)$$

fuer alle $M \in \wp(\mathcal{X})$, also

$$\begin{aligned}
\mu^*(M) &= \mu^*\Big(M \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) + \mu^*\Big(M \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(M \cap A_k) + \mu^*(M \setminus A)
\end{aligned}$$

gilt fuer alle $n = 1, 2, \ldots$. Also ist

$$\begin{aligned}
\mu^*(M) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(M \cap A_k) + \mu^*(M \setminus A) \\
&\overset{\textbf{VI}}{\geq} \mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (M \cap A_k)\Big) + \mu^*(M \setminus A) \\
&= \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \setminus A)
\end{aligned}$$

fuer alle $M \in \wp(\mathcal{X})$. Wegen **VII** folgt $A \in \mathcal{A}$. Setzen wir $M = A$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) &= \mu^*(A) \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).
\end{aligned}$$

Die umgekehrte Ungleichung folgt aus **VI**.

XV Nun zeigen wir, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist. **IX** und **X** liefern die ersten beiden Eigenschaften. Sei (A_n) eine Folge in $\mathcal{A}$. Wir setzen

$$B_n := A_n \setminus \bigcup_{k<n} A_k.$$

Dann ist $B_n \in \mathcal{A}$ nach **XI** und **XII**, also

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$$

nach **XIV**.

XVI Es ist $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}$ und $\mu^* |_{\mathcal{A}}$ ist ein Mass. Dies folgt aus **VIII**, **IV** und **XIV**.

$\square$

2.3.2 Eindeutigkeit

Nach der Existenzfrage untersuchen wir nunmehr das Problem der Eindeutigkeit.

Satz 2.3.2 *Sei $\mathcal{X}$ eine Menge, $\mathfrak{S} \subset \wp(\mathcal{X})$ ein $\cap$-stabiles Mengensystem. Seien μ_1 und μ_2 Masse auf $\sigma(\mathfrak{S})$ und es gelte*

1) $\mu_1|_{\mathfrak{S}} = \mu_2|_{\mathfrak{S}}$.

2) *Es gibt eine Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{S}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \mathcal{X}$ und $\mu_1(B_n) = \mu_2(B_n) < +\infty$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$.*

Dann ist $\mu_1 = \mu_2$ auf $\sigma(\mathfrak{S})$.

Beweis.
I Fuer $B \in \mathfrak{S}$ setzen wir

$$\mathcal{D}_B = \{A : A \in \sigma(\mathfrak{S}),\ \mu_1(A \cap B) = \mu_2(A \cap B)\}.$$

Dann ist $\mathfrak{S} \subset \mathcal{D}_B \subset \sigma(\mathfrak{S})$, da $\mathfrak{S}$ $\cap$-stabil ist.

II Zeigen wir nun, dass $\mathcal{D}_B$ ein Dynkin-System ist, falls $B \in \mathfrak{S}$ ist und $\mu_1(B) = \mu_2(B) < +\infty$.

1) $\mathcal{X} \in \mathcal{D}_B$ ist klar.

2) Ist $A \in \mathcal{D}_B$, so ist $\mathcal{X} \setminus A \in \sigma(\mathfrak{S})$ und

$$\begin{aligned}
\mu_1((\mathcal{X} \setminus A) \cap B) &= \mu_1(B \setminus A) \\
&= \mu_1(B) - \mu_1(A \cap B) \quad (\underline{\text{Beachte}}\text{: } \mu_1(A \cap B) < \infty) \\
&= \mu_2(B) - \mu_2(A \cap B) \\
&= \mu_2(B \setminus A) \\
&= \mu_2((\mathcal{X} \setminus A) \cap B),
\end{aligned}$$

also ist $\mathcal{X} \setminus A \in \mathcal{D}_B$.

3) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{D}_B$. Dann ist

$$\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \sigma(\mathfrak{S}).$$

Darueber hinaus gilt

$$\begin{aligned}
\mu_1\Big(\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \cap B\Big) &= \mu_1\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B)\Big) \\
&\overset{\mu_1 \text{ ein Mass}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(A_n \cap B) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_2(A_n \cap B) \\
&\overset{\mu_2 \text{ ein Mass}}{=} \mu_2\Big(\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \cap B\Big),
\end{aligned}$$

daher $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}_B$.

III Wegen Satz 2.2.3 ist $\mathcal{D}_B = \sigma(\mathfrak{S})$, also $\mu_1(A \cap B) = \mu_2(A \cap B)$ fuer alle $A \in \sigma(\mathfrak{S})$ und alle $B \in \mathfrak{S}$ mit $\mu_1(B) < \infty$.

IV Wir setzen $A_n = B_n \setminus \bigcup_{k<n} B_k$. Dann ist $A_n \in \sigma(\mathfrak{S})$, $A_n \subset B_n$ und

$$\mathcal{X} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Also gilt fuer jedes $A \in \sigma(\mathfrak{S})$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mu_1(A \cap A_n) &= \mu_1((A \cap A_n) \cap B_n) \\
&\overset{\textbf{III}}{=} \mu_2((A \cap A_n) \cap B_n) \\
&= \mu_2(A \cap A_n),
\end{aligned}$$

daher

$$\begin{aligned}
\mu_1(A) &= \mu_1\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap A_n)\Big) \\
&\overset{\mu_1 \text{ ein Mass}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(A \cap A_n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_2(A \cap A_n) \\
&\overset{\mu_2 \text{ ein Mass}}{=} \mu_2(A)
\end{aligned}$$

fuer alle $A \in \sigma(\mathfrak{S})$.

□

2.3.3 Lebesgue-Mass

Folgerung 2.3.1 *Der n-dimensionale Elementarinhalt*

$$\lambda([a,b)) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$$

laesst sich auf genau eine Weise zu einem Mass λ auf der Borel-Algebra $\sigma(\mathcal{O}^n)$ im $\mathbb{R}^n$ fortsetzen.

Dieses Mass heisst "Lebesgue-Mass" (oder Lebesgue-Borel-Mass).

Beweis. Nach dem Satz 1.3.1 gilt $\sigma(\mathcal{O}^n) = \sigma(\mathcal{I}^n)$.
Fortsetzbarkeit: Wegen Satz 2.2.2 erfuellt λ die Voraussetzungen vom Satz 2.3.1 mit $\mathcal{R} = \mathcal{F}^n$.
Eindeutigkeit: Wegen Satz 2.3.2, angewendet auf $\mathfrak{S} = \mathcal{I}^n$.

□

2.4 Messbare Abbildungen

Das Problem, den Inhalt einer moeglichst grossen Klasse von Mengen zu definieren, wird vom Masserweiterungssatz in fuer viele Zwecke der Analysis befriedigender Weise geloest. Wir beschaeftigen uns jetzt mit Invarianzeigenschaften (z.B.: "Kongruente Dreiecke haben denselben Inhalt").

2.4.1 Messbare Abbildungen

Definition 2.4.1 *Seien $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Mengen und $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Algebren auf $\mathcal{X}$ bzw. $\mathcal{Y}$. Eine Abbildung $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ heisst "messbar" (oder $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-messbar, falls nicht klar ist, welche σ-Algebren gemeint sind), falls $T^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ fuer alle $B \in \mathcal{B}$ (d.h. falls die Urbilder von messbaren Mengen messbar sind).*

Satz 2.4.1 *Seien $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Mengen, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebren auf $\mathcal{X}$, $\mathfrak{S}$ ein Mengensystem in $\mathcal{Y}$, $\mathcal{B} = \sigma(\mathfrak{S})$ und sei $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ eine Abbildung. Dann gilt: T ist messbar genau dann, wenn $T^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ fuer jedes $B \in \mathfrak{S}$ ist.*

Beweis. Die Implikation "$\Rightarrow$" ist trivial, beweisen wir "$\Leftarrow$". Es ist einfach zu zeigen, dass

$$T_*\mathcal{A} := \{B : B \in \mathcal{Y},\, T^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra in $\mathcal{Y}$ mit $\mathfrak{S} \subset T_*\mathcal{A}$ ist. Also gilt $\mathcal{B} = \sigma(\mathfrak{S}) \subset T_*\mathcal{A}$.

□

Beachte: Jede Abbildung $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ist $\mathcal{A} - T_*\mathcal{A}$-messbar.

2.4.2 Messbarkeit von stetigen Abbildungen

Folgerung 2.4.1 *Seien $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, d_{\mathcal{Y}})$ metrische Raeume, $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ stetig. Dann ist T messbar (bezueglich der Borel-Algebren).*

Beweis. Ist U eine offene Menge in $\mathcal{Y}$, so ist $T^{-1}(U)$ offen in $\mathcal{X}$, da T stetig ist. Also ist $T^{-1}(U)$ Borel-messbar. Aus Satz 2.4.1 folgt die Behauptung.

$\square$

2.4.3 Bildmass

Satz 2.4.2 *Seien $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Mengen und $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Algebren auf $\mathcal{X}$ bzw. $\mathcal{Y}$. Sei $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ messbar. Dann wird fuer jedes Mass μ auf $\mathcal{A}$ durch*

$$\nu(B) := \mu(T^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B},$$

ein Mass ν auf $\mathcal{B}$ definiert.

Das Mass ν heisst das "Bild" von μ bei der Abbildung T, geschrieben $\nu = T(\mu)$.

Beweis. Fuer $B \in \mathcal{B}$, ist $T^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, also ist $\nu(B)$ wohl definiert. Sei nun $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{B}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \nu\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) &= \mu\Big(T^{-1}\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big)\Big) \\ &= \mu\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} T^{-1}(B_n)\Big) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(T^{-1}(B_n)) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(B_n). \end{aligned}$$

$\square$

2.4.4 Messbarkeit von Hintereinanderausfuehrungen

Satz 2.4.3 *Seien*

$$\begin{aligned} T_1 : \ (\mathcal{X}_1, \mathcal{A}_1) &\to (\mathcal{X}_2, \mathcal{A}_2), \\ T_2 : \ (\mathcal{X}_2, \mathcal{A}_2) &\to (\mathcal{X}_3, \mathcal{A}_3) \end{aligned}$$

messbar ($\mathcal{X}_i$ eine Menge, $\mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra auf $\mathcal{X}_i$). Dann gilt:

1) $T_2 \circ T_1$ *ist messbar.*

2) *Ist μ ein Mass auf $\mathcal{A}_1$, so gilt $(T_2 \circ T_1)(\mu) = T_2(T_1(\mu))$.*

Beweis. Fuer alle $C \in \mathcal{A}_3$ gilt $T_2^{-1}(C) \in \mathcal{A}_2$, daher

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(C) = T_1^{-1}(T_2^{-1}(C)) \in \mathcal{A}_1,$$

also ist $T_2 \circ T_1$ messbar. Darueber hinaus ist

$$\begin{aligned}(T_2(T_1(\mu)))(C) &= (T_1(\mu))(T_2^{-1}(C)) \\ &= \mu(T_1^{-1}(T_2^{-1}(C))) \\ &= \mu((T_2 \circ T_1)^{-1}(C)) \\ &= (T_2 \circ T_1)(\mu)(C)\end{aligned}$$

fuer alle $C \in \mathcal{A}_3$.

□

2.4.5 Beispiele

Translation Sei $T_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $T_v(x) = x + v$ gegeben, wobei $v \in \mathbb{R}^n$ fest ist. T_v ist stetig, also messbar. Wir betrachten $\nu := T_v(\lambda)$. Fuer alle a, b gilt

$$\begin{aligned}\nu([a,b)) &= \lambda(T_v^{-1}([a,b))) \\ &= \lambda([a-v, b-v)) \\ &= \prod_{j=1}^{n} ((b_j - v_j) - (a_j - v_j)) \\ &= \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \\ &= \lambda([a,b));\end{aligned}$$

also sind λ und $T_v(\lambda)$ auf $\mathcal{I}^n$ gleich. Aus dem Eindeutigkeitssatz 2.3.2 folgt, dass $\lambda = T_v(\lambda)$ auf der Borel-Algebra. Man sagt, dass das Lebesgue-Mass "translationsinvariant" auf dem $\mathbb{R}^n$ ist.

Streckung Sei $D_{j,s} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$D_{j,s}(x) = (x_1, \ldots, x_{j-1}, sx_j, x_{j+1}, \ldots, x_n),$$

wobei $1 \leq j \leq n$ und $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fest sind. $D_{j,s}$ ist stetig, also messbar. Wir betrachten wieder $\nu := D_{j,s}(\lambda)$. Fuer Intervalle $[a,b) \neq \emptyset$ gilt

$$(D_{j,s})^{-1}([a,b)) = \left[\left(a_1, \ldots, \frac{a_j}{s}, \ldots, a_n\right), \left(b_1, \ldots, \frac{b_j}{s}, \ldots, b_n\right)\right),$$

falls $s > 0$, und

$$(D_{j,s})^{-1}([a,b)) = \Big[\Big(a_1, \ldots, \frac{b_j}{s}, \ldots, a_n\Big), \Big(b_1, \ldots, \frac{a_j}{s}, \ldots, b_n\Big)\Big),$$

falls $s < 0$. Also ist (Rand egal)

$$\begin{aligned} \nu([a,b)) &= \lambda((D_{j,s})^{-1}([a,b))) \\ &= \frac{1}{|s|} \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \\ &= \frac{1}{|s|}\, \lambda([a,b)). \end{aligned}$$

Aus dem Eindeutigkeitssatz 2.3.2 folgt, dass

$$D_{j,s}(\lambda) = \frac{1}{|s|}\, \lambda$$

auf der Borel-Algebra.

Homothetie Sei $H_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $H_r(x) := rx$ gegeben, wobei $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ fest ist. Es ist

$$H_r = D_{n,r} \circ \ldots \circ D_{1,r},$$

also

$$\begin{aligned} H_r(\lambda) &= (D_{n,r} \circ \ldots \circ D_{1,r})(\lambda) \\ &\overset{\text{Satz 2.4.3}}{=} D_{n,r}(\ldots D_{1,r}(\lambda) \ldots) \\ &\overset{\text{Streckung}}{=} \frac{1}{|r|^n}\, \lambda. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $H_{-1}(\lambda) = \lambda$ (“Spiegelungsinvarianz”).

2.5 Eigenschaften des Lebesgue-Masses

2.5.1 Translationsinvarianz

Satz 2.5.1 *Sei μ ein Mass auf der Borel-Algebra im $\mathbb{R}^n$, welches translationsinvariant ist, d.h. $T_v(\mu) = \mu$ fuer alle $v \in \mathbb{R}^n$, und welches $\mu([0,1)) < \infty$ erfuellt. Dann gilt $\mu = s\lambda$ mit $s = \mu([0,1))$.*

Beweis. Wir setzen $s = \mu([0,1))$, also $\mu([0,1)) = s\lambda([0,1))$, und

$$\begin{aligned} I_k &:= \Big[0, \Big(\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}\Big)\Big), \\ G_k &:= \Big\{(v_1, \ldots, v_n) : \, v_j = \frac{\ell_j}{k},\, \ell_j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}\Big\}. \end{aligned}$$

Dann ist fuer jedes $k \in \mathbb{N}$

$$[0,1) = \bigsqcup_{v \in G_k} T_v(I_k)$$

und $\mu(T_v(I_k)) = \mu(I_k)$, also

$$\begin{array}{rcl} \mu([0,1)) & \overset{\mu \text{ ein Mass}}{=} & k^n \, \mu(I_k), \\ \lambda([0,1)) & = & k^n \, \lambda(I_k). \end{array}$$

Also ist

$$\mu(I_k) = s \, \lambda(I_k)$$

fuer alle $k \in \mathbb{N}$.

Sei nun $I = [0, (b_1, \ldots, b_n))$ mit $b_j \in \mathbb{Q}$ fuer alle $j = 1, \ldots, n$. Dann ist

$$\begin{array}{rcl} I & = & \Big[0, \Big(\dfrac{L_1}{k}, \ldots, \dfrac{L_n}{k}\Big)\Big) \quad (\text{fuer geeignete } k, L_j \in \mathbb{N}) \\ & = & \displaystyle\bigsqcup_{v \in G(b)} T_v(I_k), \end{array}$$

wobei

$$G(b) = \Big\{ \Big(\frac{\ell_1}{k}, \ldots, \frac{\ell_n}{k}\Big) : \ell_j \in \{0, 1, \ldots, L_j - 1\} \Big\}.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{array}{rcl} \mu(I) & = & \displaystyle\sum_{v \in G(b)} \mu(T_v(I_k)) \\ & = & \displaystyle\sum_{v \in G(b)} \mu(I_k) \\ & = & \mu(I_k) \displaystyle\prod_{j=1}^{n} L_j \\ & = & s \, \lambda(I_k) \displaystyle\prod_{j=1}^{n} L_j \\ & = & s \, \lambda(I). \end{array}$$

Ebenso ist fuer $a, b \in \mathbb{Q}^n$

$$\begin{array}{rcl} \mu([a,b)) & = & \mu([0, b-a)) \\ & = & s \, \lambda([0, b-a)) \\ & = & s \, \lambda([a,b)). \end{array}$$

Sei nun $\mathcal{I}^n_{\mathbb{Q}} = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{Q}^n\}$. Dann ist $\sigma(\mathcal{I}^n_{\mathbb{Q}}) = \sigma(\mathcal{I}^n)$ die Borel-Algebra im $\mathbb{R}^n$, da jedes offene Intervall sich als abzaehlbare Vereinigung von halboffenen Intervallen mit rationalen Koordinaten schreiben laesst. Da $\sigma(\mathcal{I}^n_{\mathbb{Q}})$ $\cap$-stabil ist, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz 2.3.2, dass $\mu(A) = s\,\lambda(A)$ fuer alle $A \in \sigma(\mathcal{I}^n)$ ist (hier geht ein, dass s endlich ist!).

$\square$

Folgerung 2.5.1 *Das Lebesgue-Mass ist das einzige translationsinvariante Mass auf der Borel-Algebra im $\mathbb{R}^n$, welches dem Einheitswuerfel $[0,1)$ das Mass 1 zuordnet!*

2.5.2 Verhalten unter orthogonalen Transformationen

Satz 2.5.2 *Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine orthogonale lineare Abbildung, d.h., $(Tx, Ty) = (x, y)$ fuer alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $T(\lambda) = \lambda$.*

Beweis. Nach Folgerung 2.5.1 genuegt es zu zeigen, dass $\mu = T(\lambda)$ ein translationsinvariantes Mass ist mit $\mu([0,1)) = 1$. Wegen

$$T(x) + v \overset{T \text{ linear}}{=} T(x + T^{-1}(v))$$

fuer alle $x, v \in \mathbb{R}^n$ gilt $T_v \circ T = T \circ T_u$ mit $u = T^{-1}(v)$. Also

$$\begin{aligned} T_v(\mu) &= T_v(T(\lambda)) \\ &= (T_v \circ T)(\lambda) \\ &= (T \circ T_u)(\lambda) \\ &= T(T_u(\lambda)) \\ &\overset{\text{Translationsinvarianz}}{=} T(\lambda) \\ &= \mu \end{aligned}$$

fuer alle $v \in \mathbb{R}^n$.

Es ist ferner $\mu([0,1)) = \lambda(T^{-1}([0,1))) < \infty$, da $T^{-1}([0,1))$ beschraenkt ist (T^{-1} ist ebenfalls orthogonal, $|T^{-1}x| = |x|$ gilt fuer alle $x \in \mathbb{R}^n$). Nach dem Satz 2.5.1 ist

$$\mu = s\,\lambda$$

mit $s = \mu([0,1))$.

Fuer $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ gilt $B = T^{-1}(B)$, da T^{-1} orthogonal ist. Daher

$$\begin{aligned} s\,\lambda(B) &= \mu(B) \\ &= \lambda(T^{-1}(B)) \\ &= \lambda(B); \end{aligned}$$

es gilt also $s = 1$ ($[0, (1/n, \ldots, 1/n)) \subset B \subset [(-1, \ldots, -1), (1, \ldots, 1))$, also ist $0 < \lambda(B) < \infty$!).

$\square$

2.5.3 Bewegungsinvarianz

Definition 2.5.1 *Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heisst "Bewegung", falls $|Tx - Ty| = |x - y|$ fuer alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist.*

Zwei Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ heissen kongruent, falls es eine Bewegung T gibt mit $B = T(A)$.

Satz 2.5.3 *Das Lebesgue-Mass ist bewegungsinvariant, d.h. es gilt $T(\lambda) = \lambda$ fuer jede Bewegung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.*

Insbesondere gilt $\lambda(A) = \lambda(B)$, falls A, B kongruente Borel-Mengen sind.

Beweis.
I Ist T eine Bewegung mit $T(0) = 0$, so ist T eine orthogonale lineare Abbildung ($\to$ Lineare Algebra $\to$ Uebung).
II Sind T_1, T_2 Bewegungen, so ist $T_2 \circ T_1$ eine Bewegung.
III Ist T eine Bewegung und $v = -T(0)$, so ist $T_v \circ T$ eine Bewegung mit $(T_v \circ T)(0) = 0$, also $T_v \circ T = U$, U orthogonal. Dies liefert $T = T_{T(0)} \circ U$. ("Jede Bewegung ist zusammengesetzt aus einer orthogonalen Abbildung und einer Translation").
VI Fuer jede Bewegung T ist

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= T_{T(0)}(U(\lambda)) \\ &\overset{\text{Satz 2.5.2}}{=} T_{T(0)}(\lambda) \\ &\overset{\text{Translationsinvarianz}}{=} \lambda. \end{aligned}$$

$\square$

2.5.4 Komposition mit linearen Abbildungen

Satz 2.5.4 *Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und invertierbar. Dann gilt*

$$T(\lambda) = \frac{1}{|\det T|}\,\lambda.$$

Beweis. Sei A die zu T gehoerende Matrix (bzgl. der Standardbasis im $\mathbb{R}^n$). Dann gibt es orthogonale Matrizen U_1, U_2 und eine Diagonalmatrix D

mit $A = U_2 D U_1$ ("Singulaerwertzerlegung" $\to$ Lineare Algebra, Numerik), wobei

$$D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$$

mit $d_j > 0$. Entsprechend laesst sich T schreiben als Komposition

$$T = T_2 \circ D_{n,d_n} \circ \ldots \circ D_{1,d_1} \circ T_1,$$

wobei T_1, T_2 orthogonale Abbildungen sind und D_{j,d_j} Streckung (siehe § 2.4.5). Nach dem Satz 2.5.2 und § 2.4.5 gilt $T_i(\lambda) = \lambda$ und $D_{j,d_j}(\lambda) = (1/d_j)\,\lambda$, also

$$T(\lambda) = \frac{1}{d_1 \cdot \ldots \cdot d_n}\,\lambda.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} |\det T| &= |\det A| \\ &= |\det U_2 \cdot \det D \cdot \det U_1| \\ &= \prod_{j=1}^{n} d_j. \end{aligned}$$

□

2.5.5 Beispiel einer nicht-Borelschen Menge

Wir beschliessen diesen Abschnitt mit einem Beispiel fuer eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die keine Borel-Menge ist.

Satz 2.5.5 *Es gibt eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$, die keine Borel-Menge ist.*

Beweis.
I Wir definieren eine Aequivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^n \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

($\sim$ ist Aequivalenzrelation: klar).

II Wir waehlen aus jeder Aequivalenzklasse genau ein Element k, und zwar so, dass $k \in [0,1)$ (Zermelosches Auswahlaxiom!). Wir definieren K als die Menge aller so gewaehlten Elemente.

III Zeigen wir, dass

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{y \in \mathbb{Q}^n} (y + K)$$

ist. Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Es gibt ein $k \in K$ mit $x \sim k$, also ist $x - k = y$ fuer ein $y \in \mathbb{Q}^n$. Daraus folgt $x \in y + K$, also

$$\mathbb{R}^n \subset \bigcup_{y \in \mathbb{Q}^n} (y + K).$$

IV Sind $x, y \in \mathbb{Q}^n$ so, dass $(x+K)\cap(y+K) \neq \emptyset$ ist, so gilt $x = y$. Um dies zu zeigen, seien $x, y \in Q^n$ mit $(x+K)\cap(y+K) \neq \emptyset$. Dann gibt es $k_1, k_2 \in K$ mit $x + k_1 = y + k_2$. Daher ist $k_2 - k_1 = x - y \in \mathbb{Q}^n$, also $k_2 \sim k_1$, also $k_2 = k_1$ und folglich $x = y$.

V Aus **III** und **IV** folgt, dass sogar

$$\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{y\in\mathbb{Q}^n} (y + K)$$

gilt.

VI Wir zeigen, dass die Annahme "K ist Borelmenge" zu einem Widerspruch fuehrt. Sei K Borelmenge. Dann ist auch $y + K$ Borelmenge fuer alle $y \in \mathbb{R}^n$, und

$$\begin{aligned} +\infty &= \lambda(\mathbb{R}^n) \\ &= \sum_{y\in\mathbb{Q}^n} \lambda(y + K) \\ &= \sum_{y\in\mathbb{Q}^n} \lambda(K), \end{aligned}$$

da das Lebesgue-Mass translationsinvariant ist, also ist $\lambda(K) > 0$. Andererseits gilt $y + K \subset [0, 2)$, falls $y \in [0, 1)$, da $K \subset [0, 1)$, also

$$\begin{aligned} \lambda([0,2)) &\geq \lambda\Big(\bigsqcup_{y\in\mathbb{Q}^n\cap[0,1)} (y + K)\Big) \\ &= \sum_{y\in\mathbb{Q}^n\cap[0,1)} \lambda(y + K) \\ &\overset{\text{Translationsinvarianz}}{=} \sum_{y\in\mathbb{Q}^n\cap[0,1)} \lambda(K), \end{aligned}$$

also $\lambda(K) = 0$ (da $\mathbb{Q}^n \cap [0, 1)$ unendliche Menge ist). Widerspruch!

□

Bemerkung 2.5.1 Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die nicht Borel'sch sind, sind zugegebenermassen ziemlich pathologisch; es gibt aber welche!

Kapitel 3

Das Lebesgue-Integral

3.1 Messbare Funktionen

3.1.1 Messbare Funktionen

Wir setzen
$$\bar{\mathcal{I}} = \{[a,b] : a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\}.$$

Definition 3.1.1 *Die von $\bar{\mathcal{I}}$ in $[-\infty,+\infty]$ erzeugte σ -Algebra $\sigma(\bar{\mathcal{I}})$ heisst Borel-Algebra in $[-\infty,+\infty]$.*

Lemma 3.1.1 *Fuer die Borel-Algebra $\sigma(\mathcal{I})$ in $\mathbb{R}$ gilt*
$$\sigma(\mathcal{I}) = \{A \cap \mathbb{R} : A \in \sigma(\bar{\mathcal{I}})\}.$$

Beweis. Uebungsaufgabe!

□

Satz 3.1.1 *Sei $\mathcal{X}$ eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra in $\mathcal{X}$, $f : \mathcal{X} \to [-\infty,\infty]$. Dann sind aequivalent:*

1) *f ist messbar (bzgl. $\mathcal{A}$ und der Borel-Algebra $\sigma(\bar{\mathcal{I}})$).*

2) $\{x \in \mathcal{X} : f(x) \geq c\} \in \mathcal{A}$ *fuer alle* $c \in \mathbb{R}$.

3) $\{x \in \mathcal{X} : f(x) > c\} \in \mathcal{A}$ *fuer alle* $c \in \mathbb{R}$.

4) $\{x \in \mathcal{X} : f(x) \leq c\} \in \mathcal{A}$ *fuer alle* $c \in \mathbb{R}$.

5) $\{x \in \mathcal{X} : f(x) < c\} \in \mathcal{A}$ *fuer alle* $c \in \mathbb{R}$.

Beweis.
1) $\Rightarrow$ 2) $\{x \in \mathcal{X} : f(x) \geq c\} = f^{-1}([c, \infty)) \in \mathcal{A}$, da f messbar ist.
2) $\Rightarrow$ 3) $\{x \in \mathcal{X} : f(x) > c\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{x \in \mathcal{X} : f(x) \geq c + \frac{1}{n}\right\}$.
3) $\Rightarrow$ 4) $\{x \in \mathcal{X} : f(x) \leq c\} = \mathcal{X} \setminus \{x \in \mathcal{X} : f(x) > c\}$.
4) $\Rightarrow$ 5) $\{x \in \mathcal{X} : f(x) < c\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{x \in \mathcal{X} : f(x) \leq c - \frac{1}{n}\right\}$.
5) $\Rightarrow$ 1) Wegen Satz 2.4.1 genuegt es zu zeigen, dass

$$\mathfrak{S} = \{[-\infty, c) : c \in \mathbb{R}\}$$

ein Erzeuger von $\sigma(\bar{\mathcal{I}})$ ist. Hierfuer wiederum ist hinreichend, dass $\bar{\mathcal{I}} \subset \sigma(\mathfrak{S})$. Wir zeigen $\bar{\mathcal{I}} \subset \sigma(\mathfrak{S})$. Es ist $[-\infty, \infty] \in \sigma(\mathfrak{S})$ nach Definition der σ-Algebra ($\mathcal{X} = [-\infty, \infty]$). Ferner gilt fuer jedes $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} [-\infty, b] &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Big[-\infty, b + \frac{1}{n} \Big) \\ &\in \sigma(\mathfrak{S}). \end{aligned}$$

Schliesslich ist fuer alle $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

$$\begin{aligned} [a, b] &= [-\infty, b] \setminus [-\infty, a) \\ &\in \sigma(\mathfrak{S}). \end{aligned}$$

□

Fuer $f, g : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ setzen wir

$$\{f \leq g\} := \{x \in \mathcal{X} : f(x) \leq g(x)\},$$

und entsprechend $\{f < g\}$, $\{f \geq g\}$, $\{f > g\}$, $\{f = g\}$, $\{f \neq g\}$.

Satz 3.1.2 *Sei $\mathcal{X}$ eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in $\mathcal{X}$, $f, g \colon \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ messbar. Dann sind die Mengen $\{f < g\}$, $\{f \leq g\}$, $\{f = g\}$, $\{f \neq g\}$, $\{f \geq g\}$, $\{f > g\}$ alle messbar.*

Beweis. Die Menge

$$\{f < g\} = \bigcup_{c \in \mathbb{Q}} (\{f < c\} \cap \{c < g\})$$

ist messbar nach Satz 3.1.1. Andererseits ist

$$\begin{aligned} \{f > g\} &= \{g < f\}, & \{f \leq g\} &= \mathcal{X} \setminus \{f > g\}, \\ \{f = g\} &= \{f \leq g\} \cap \{f \geq g\}, & \{f \neq g\} &= \mathcal{X} \setminus \{f = g\}. \end{aligned}$$

□

3.1.2 Spur σ-Algebren

Satz 3.1.3 *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf $\mathcal{X}$ und $M \subset \mathcal{X}$. Dann ist durch $\mathcal{A} \cap M := \{A \cap M : A \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra auf M definiert (die sogenannte "Spur σ-Algebra von $\mathcal{A}$").*

Beweis. Es gilt $M = \mathcal{X} \cap M \in \mathcal{A} \cap M$, da $\mathcal{X} \in \mathcal{A}$. Ist $A \cap M \in \mathcal{A} \cap M$, so gilt

$$\begin{aligned} M \setminus (A \cap M) &= (\mathcal{X} \setminus A) \cap M \\ &\in \mathcal{A} \cap M, \end{aligned}$$

da $\mathcal{X} \setminus A \in \mathcal{A}$ ist. Und $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, impliziert

$$\begin{aligned} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap M) &= \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \cap M \\ &\in \mathcal{A} \cap M. \end{aligned}$$

□

Der folgende Satz hat viele praktische Anwendungen.

Satz 3.1.4 *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf $\mathcal{X}$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $\mathcal{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, und sei $f : \mathcal{X} \to [-\infty, +\infty]$. Dann gilt: f ist $\mathcal{A} - \sigma(\bar{\mathcal{I}})$-messbar genau dann, wenn $f|_{A_n} : A_n \to [-\infty, +\infty]$ $(\mathcal{A} \cap A_n) - \sigma(\bar{\mathcal{I}})$-messbar fuer alle $n \in \mathbb{N}$ ist.*

Beweis. Uebungsaufgabe!

□

Wir zeigen eine der Anwendungen. Ist $f : \mathcal{X} \to [-\infty, +\infty]$ durch Fallunterscheidung in endlich oder abzaehlbar unendlich viele Faelle definiert, d.h.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{falls} \quad x \in A_1, \\ \quad\vdots & \\ f_n(x), & \text{falls} \quad x \in A_n, \\ \quad\vdots & \end{cases}$$

und will man ueberpruefen, ob f messbar ist, so genuegt der Nachweis, dass 1) alle A_n messbar sind und 2) alle $f_n : A_n \to [-\infty, +\infty]$ messbar sind.

3.1.3 Operationen mit messbaren Funktionen

Satz 3.1.5 *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf $\mathcal{X}$ und $f, g : \mathcal{X} \to [-\infty, +\infty]$ messbar. Dann gilt:*

1) *$f+g:\mathcal{X}^+\to[-\infty,+\infty]$ und $f-g:\mathcal{X}^-\to[-\infty,+\infty]$ sind messbar, wobei $\mathcal{X}^\pm$ der Definitionsbereich von $f\pm g$ ist, d.h.*

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^+ &= (\{f<\infty\}\cup\{g>-\infty\})\cap(\{f>-\infty\}\cup\{g<\infty\}),\\ \mathcal{X}^- &= (\{f<\infty\}\cup\{g<\infty\})\cap(\{f>-\infty\}\cup\{g>-\infty\}).\end{aligned}$$

2) *$f\cdot g:\mathcal{X}\to[-\infty,+\infty]$ ist messbar.*

Beweis. Durch mehrfaches Anwenden von Satz 3.1.1:

I Die Funktion $d-g$ ist fuer jedes $d\in\mathbb{R}$ messbar, denn ist $c\in\mathbb{R}$, so gilt $\{d-g\geq c\}=\{g\leq d-c\}\in\mathcal{A}$, da g messbar ist.

II $d+g=d-(-g)=d-(0-g)$ ist nach **I** fuer jedes $d\in\mathbb{R}$ messbar.

III $f+g:\mathcal{X}^+\to\mathbb{R}$ ist messbar, denn auf $\mathcal{X}^+$ gilt

$$\begin{aligned}\{f+g\geq c\} &= \{f\geq c-g\}\\ &\in \mathcal{A}\end{aligned}$$

fuer jedes $c\in\mathbb{R}$ wegen **I** und Satz 3.1.2. Da auf $\mathcal{X}^-$ gilt $f-g=f+(-g)$, ist auch $f-g$ auf $\mathcal{X}^-$ messbar.

VI f^2 ist messbar, denn es gilt

$$\{f^2\geq c\}=\begin{cases}\mathcal{X}, & \text{falls}\quad c\leq 0,\\ \{f\geq\sqrt{c}\}\cup\{f\leq-\sqrt{c}\}, & \text{falls}\quad c>0,\end{cases}$$

also $\{f^2\geq c\}\in\mathcal{A}$ fuer alle $c\in\mathbb{R}$.

V Im Spezialfall $f,g:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ gilt die Identitaet

$$fg=\frac{1}{4}(f+g)^2-\frac{1}{4}(f-g)^2,$$

also ist $f\cdot g$ messbar.

VI Nun zeigen wir, dass $f\cdot g$ messbar fuer alle $f,g:\mathcal{X}\to[-\infty,\infty]$ ist. Setze

$$\begin{aligned}A_1 &= \{f\cdot g=\infty\}, & A_2 &= \{f\cdot g=-\infty\},\\ A_3 &= \{f\cdot g=0\}, & A_4 &= \mathcal{X}\setminus(A_1\cup A_2\cup A_3).\end{aligned}$$

Alle A_i sind messbar nach Satz 3.1.2 angewendet auf die messbaren Funktionen $f\equiv+\infty$ und $f\equiv-\infty$, da

$$\begin{aligned}A_1 &= (\{f=\infty\}\cap\{g>0\})\cup(\{f=-\infty\}\cap\{g<0\})\\ &\cup\ (\{f>0\}\cap\{g=\infty\})\cup(\{f<0\}\cap\{g=-\infty\}),\\ A_2 &= \ldots\quad\text{(analog)},\\ A_3 &= \{f=0\}\cup\{g=0\}.\end{aligned}$$

Also ist

$$(fg)(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls} \quad x \in A_1, \\ -\infty, & \text{falls} \quad x \in A_2, \\ 0, & \text{falls} \quad x \in A_3, \\ (fg)(x), & \text{falls} \quad x \in A_4. \end{cases}$$

Letztendlich ist $(fg)(A_4) \subset \mathbb{R}$, also ist $(fg) : A_4 \to [-\infty, \infty]$ messbar nach **V** und Lemma 3.1.1, daher ist fg auf $\mathcal{X}$ messbar nach Satz 3.1.4.

□

3.1.4 Folgen von messbaren Funktionen

Satz 3.1.6 *Sei $\mathcal{X}$ eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf $\mathcal{X}$, $f_n : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ messbar fuer alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind auch die Funktionen*

$$\begin{array}{cc} \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, & \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \\ \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n, & \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n \end{array}$$

messbar.

Beweis. Fuer alle $c \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathcal{X}$ gilt

$$\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big)(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \leq c$$

genau dann, wenn $f_n(x) \leq c$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$\Big\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq c\Big\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \leq c\},$$

also ist $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq c\}$ nach Folgerung 1.2.1 messbar fuer alle $c \in \mathbb{R}$. Nach Satz 3.1.1 ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ messbar. Weiter

$$\begin{aligned} \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n &= -\sup_{n\in\mathbb{N}}(-f_n), \\ \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n &= \inf_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sup_{k\geq n} f_k\Big), \\ \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\inf_{k\geq n} f_k\Big). \end{aligned}$$

□

Folgerung 3.1.1 *Sei $\mathcal{X}$ eine Menge, sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf $\mathcal{X}$ und sei $f_n : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ punktweise konvergent gegen $f : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$, d.h.*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

fuer alle $x \in \mathcal{X}$. Dann gilt: Ist f_n messbar fuer jedes $n \in \mathbb{N}$, so ist f messbar.

Beweis.

$$\begin{aligned} f &= \limsup_{n\to\infty} f_n \\ &= \liminf_{n\to\infty} f_n. \end{aligned}$$

□

Folgerung 3.1.2 *Sei $\mathcal{X}$ eine Menge, sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf $\mathcal{X}$ und sei $f : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ messbar. Dann sind auch*

der "Positivteil" $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$,
der "Negativteil" $f^-(x) := -\min\{f(x), 0\} = (-f)^+(x)$

sowie $|f| = f^+ + f^-$ messbar.

3.2 Das Lebesgue-Integral

3.2.1 Treppenfunktionen

Sei $\mathcal{X}$ eine Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf $\mathcal{X}$.

Fuer $A \subset \mathcal{X}$ definieren wir die "charakteristische Funktion" von A durch

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x \in A, \\ 0, & \text{falls} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Es gilt: $\chi_A : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ ist messbar genau dann, wenn A messbar ist.

Lemma 3.2.1 (Rechenregel)

1) $\chi_{\mathcal{X}\setminus A} = 1 - \chi_A$;

2) $A \subset B$ *ist genau dann, wenn* $\chi_A \leq \chi_B$;

3) $A \cap B = \emptyset$ *impliziert* $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$;

4) $\chi_{\bigcup_{i\in I} A_i} = \sup_{i\in I} \chi_{A_i}$;

5) $\chi_{\bigcap_{i\in I} A_i} = \inf_{i\in I} \chi_{A_i}$;

Beweis. Uebungsaufgabe!

□

Eine Funktion $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ heisst "Treppenfunktion", wenn sie nichtnegativ und messbar ist und nur endlich viele Werte annimmt, d.h., es gibt $N \in \mathbb{N}$ und $c_1, \ldots, c_N \geq 0$ mit $f(\mathcal{X}) = \{c_1, \ldots, c_N\}$. Seien o.B.d.A. alle c_i verschieden. Die

Mengen $A_i = \{x : x \in \mathcal{X},\ f(x) = c_i\}$ sind dann messbar und disjunkt, und es gilt

$$f = \sum_{i=1}^{N} c_i\, \chi_{A_i}$$

(die Mengen A_i brauchen aber keine Struktur zu haben).

3.2.2 Lebesgue-Integral von Treppenfunktionen

Erlaeutern wir die Idee des Lebesgue-Integrals im Gegensatz zum Riemann-Integral:

Riemann Intervall $\mathcal{X} = [a, b]$ wird diskretisiert, $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_N = b$, und f wird auf den Teilintervallen $[a_n, a_{n+1}]$ approximiert.

Lebesgue Der Wertebereich von f wird in die Werte c_n diskretisiert, und f wird durch eine Treppenfunktion approximiert.

Definition 3.2.1 *Seien $\mathcal{X}$ eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf $\mathcal{X}$, μ ein Mass auf $\mathcal{A}$. Dann heisst das Tripel $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ "Massraum".*

Unsere typische Anwendung ist: $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} =$ die Borelalgebra im $\mathbb{R}^n$ und $\mu = \lambda =$ Lebesgue-Mass.

Definition 3.2.2 *Seien $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Ist dann $f = \sum_{i=1}^{N} c_i\, \chi_{A_i}$, mit $c_i \geq 0$ und paarweise disjunkten $A_i \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{i=1}^{N} A_i = \mathcal{X}$, so heisst*

$$\int_{\mathcal{X}} f d\mu := \sum_{i=1}^{N} c_i \mu(A_i)$$

das Lebesgue-Integral von f (ueber $\mathcal{X}$ bezueglich μ).

Lemma 3.2.2 *Definition 3.2.2 ist sinnvoll, d.h. es gilt*

$$\sum_{i=1}^{N} c_i\, \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{M} d_j\, \chi_{B_j} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} c_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{M} d_j \mu(B_j)$$

falls $(A_i)_{1 \leq i \leq N}, (B_j)_{1 \leq j \leq M} \subset \mathcal{A}$ paarweise disjunkt mit $\bigcup_{i=1}^{N} A_i = \mathcal{X} = \bigcup_{j=1}^{M} B_j$ sind.

Beweis. Die Mengen $(A_i \cap B_j)_{\substack{1\le i\le N\\ 1\le j\le M}}$ sind ebenfalls disjunkt und messbar. Es folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_i\,\chi_{A_i\cap B_j} &= \sum_{i=1}^{N} c_i \sum_{j=1}^{M} \chi_{A_i\cap B_j} \\
&\overset{A_i=\sqcup_j(A_i\cap B_j)}{=} \sum_{i=1}^{N} c_i\,\chi_{A_i} \\
&= \sum_{j=1}^{M} d_j\,\chi_{B_j} \\
&\overset{B_j=\sqcup_i(A_i\cap B_j)}{=} \sum_{j=1}^{M} d_j \sum_{i=1}^{N} \chi_{A_i\cap B_j} \\
&= \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} d_j\,\chi_{A_i\cap B_j},
\end{aligned}$$

d.h. es ist $c_i = d_j$, falls $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. Somit folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} c_i\,\mu(A_i) &= \sum_{i,j} c_i\,\mu(A_i\cap B_j) \\
&= \sum_{i,j} d_j\,\mu(A_i\cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{M} d_j\,\mu(B_j).
\end{aligned}$$

□

Satz 3.2.1 *Sei $(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$ ein Massraum. Dann gelten:*

1) $\displaystyle\int_{\mathcal{X}} \chi_A d\mu = \mu(A)$ *fuer alle* $A \in \mathcal{A}$*;*

2) $\displaystyle\int_{\mathcal{X}} c\,f d\mu = c\int_{\mathcal{X}} f d\mu$ *fuer jedes* $c \geq 0$ *und jede Treppenfunktion* f*;*

3) $\displaystyle\int_{\mathcal{X}} (f+g)d\mu = \int_{\mathcal{X}} f d\mu + \int_{\mathcal{X}} g d\mu$ *fuer alle Treppenfunktionen* f, g*;*

4) $\displaystyle\int_{\mathcal{X}} f d\mu \leq \int_{\mathcal{X}} g d\mu$ *fuer alle Treppenfunktionen* f, g *mit* $f \leq g$.

Beweis.
1), 2) folgen direkt aus der Definition.
Zu 3)**:** Seien

$$f = \sum_{i=1}^{N} c_i \, \chi_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^{M} d_j \, \chi_{B_j},$$

$(A_i)_i, (B_j)_j \subset \mathcal{A}$ paarweise disjunkt mit $\bigcup_i A_i = \mathcal{X} = \bigcup_j B_j$. Dann sind auch die Mengen $(A_i \cap B_j)_{i,j} \subset \mathcal{A}$ paarweise disjunkt mit $\bigcup_{i,j}(A_i \cap B_j) = \mathcal{X}$, und es gilt

$$f + g = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (c_i + d_j) \chi_{A_i \cap B_j},$$

also

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} (f+g) d\mu &= \sum_{i,j} (c_i + d_j) \, \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_i c_i \, \mu(A_i) + \sum_j d_j \, \mu(B_j) \\ &= \int_{\mathcal{X}} f d\mu + \int_{\mathcal{X}} g d\mu. \end{aligned}$$

Zu 4)**:** Ist

$$f = \sum_{i=1}^{N} c_i \, \chi_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^{M} d_j \, \chi_{B_j},$$

$(A_i)_i, (B_j)_j \subset \mathcal{A}$ paarweise disjunkt mit $\bigcup_i A_i = \mathcal{X} = \bigcup_j B_j$ und $c_i \geq 0$, $d_j \geq 0$, so ist auch

$$f = \sum_{i,j} c_i \, \mu(A_i \cap B_j) \leq g = \sum_{i,j} d_j \, \mu(A_i \cap B_j).$$

also $c_i \leq d_j$, falls $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. Daher

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} f d\mu &= \sum_{i,j} c_i \mu(A_i \cap B_j) \\ &\leq \sum_{i,j} d_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \int_{\mathcal{X}} g d\mu. \end{aligned}$$

$\square$

3.2.3 Approximation durch die Treppenfunktionen

Satz 3.2.2 *Sei $\mathcal{X}$ eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf $\mathcal{X}$, $f : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ messbar und $f \geq 0$. Dann gibt es eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen auf $\mathcal{X}$ mit $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$ und*

$$f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n.$$

Beweis. f_n wird durch Diskretisierung des Wertebereichs von f konstruiert. Wir definieren $A_{n,k} \subset \mathcal{X}$ durch

$$A_{n,k} := \begin{cases} \{x : \, k2^{-n} \leq f(x) < (k+1)2^{-n}\}, & \text{falls} \quad 0 \leq k < n2^n, \\ \{x : \, f(x) \geq n\}, & \text{falls} \quad k = n2^n, \end{cases}$$

und

$$f_n := \sum_{k=1}^{n2^n} k2^{-n} \, \chi_{A_{n,k}}$$

(also $f_n(x) = k2^{-n}$, falls $x \in A_{n,k}$). Dann ist $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ nach Konstruktion und

$$\begin{aligned} f(x) = \infty \quad &\Rightarrow \quad f_n(x) = n, \\ f(x) < \infty \quad &\Rightarrow \quad 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 2^{-n} \quad \text{fuer} \quad n > f(x), \end{aligned}$$

also gilt $f = \sup f_n$.

□

3.2.4 Das Lebesgue-Integral

Definition 3.2.3 *Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, $f : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ messbar, $f \geq 0$. Wir definieren das Lebesgue-Integral von f (ueber $\mathcal{X}$ bezueglich μ) durch*

$$\int_{\mathcal{X}} f d\mu := \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathcal{X}} f_n d\mu,$$

wobei (f_n) eine Folge von Treppenfunktionen auf $\mathcal{X}$ mit $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ fuer alle n und $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ist.

Nach Satz 3.2.2 gibt es immer eine solche Folge (f_n) von Treppenfunktionen. Wir muessen noch zeigen, dass die Definition des Integrals nicht von der Wahl der Folge abhaengt (siehe Lemma 3.2.3, 2)).

Beachte: Es kann sein, dass $\displaystyle\int_{\mathcal{X}} f d\mu = +\infty$!

Lemma 3.2.3 *Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen auf $\mathcal{X}$ mit $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ fuer alle n. Dann gilt:*

1) *Ist f eine Treppenfunktion mit $0 \le f \le \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, so ist*

$$\int_{\mathcal{X}} f d\mu \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{X}} f_n d\mu.$$

2) *Ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $0 \le g_n \le g_{n+1}$ fuer alle n und $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, so ist*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{X}} g_n d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{X}} f_n d\mu.$$

Beweis.
1) Sei

$$f = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{A_i}$$

mit $(A_i) \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{X} = \bigsqcup\limits_i A_i$ und $c_i \ge 0$ fuer alle i. Waehle ein $c \in \mathbb{R}$ mit $0 < c < 1$ und setze $B_n := \{f_n \ge cf\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f_n &\ge cf\chi_{B_n} \\ &= c\sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{A_i}\chi_{B_n} \\ &= \sum_{i=1}^{N} cc_i\, \chi_{A_i\cap B_n}, \end{aligned}$$

also nach Satz 3.2.1, 4)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} f_n d\mu &\ge \int_{\mathcal{X}} \sum_{i=1}^{N} cc_i\, \chi_{A_i\cap B_n}\, d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{N} cc_i\, \mu(A_i \cap B_n). \end{aligned}$$

Nun gilt auf $\{f \ne 0\}$ offenbar $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n > cf$. Hieraus folgt $B_n \nearrow \mathcal{X}$, denn $B_n \subset B_{n+1}$ fuer alle n ist klar, und waere $x \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$ fuer ein $x \in \mathcal{X}$, so folgte $f_n(x) < cf(x) < f(x)$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$, also $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \le cf(x) < f(x)$. Widerspruch! Es folgt nun $A_i \cap B_n \nearrow A_i$ fuer jedes i, also nach Uebungsaufgabe

$\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_i \cap B_n) = \mu(A_i)$, d.h.

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{X}} f_n d\mu &\geq c\sum_{i=1}^{N} c_i\mu(A_i)\\ &= c\int_{\mathcal{X}} f d\mu\end{aligned}$$

fuer alle $c \in (0,1)$. Grenzuebergang fuer $c \nearrow 1$ liefert die Behauptung.

2) Es ist $0 \leq g_k \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ fuer alle $k \in \mathbb{N}$, also nach 1)

$$\int_{\mathcal{X}} g_k d\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{X}} f_n d\mu$$

fuer alle $k \in \mathbb{N}$, also

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{X}} g_k d\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{X}} f_n d\mu.$$

Vertauschen der Rollen von g_k und f_n liefert die umgekehrte Ungleichung.

□

3.2.5 Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

Satz 3.2.3 *Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum. Dann gilt fuer alle messbaren Funktionen $f, g : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ mit $f, g \geq 0$:*

1) $\int_{\mathcal{X}} (cf) d\mu = c \int_{\mathcal{X}} f d\mu$ *fuer alle* $c \geq 0$*;*

2) $\int_{\mathcal{X}} (f+g) d\mu = \int_{\mathcal{X}} f d\mu + \int_{\mathcal{X}} g d\mu$*;*

3) $\int_{\mathcal{X}} f d\mu \leq \int_{\mathcal{X}} g d\mu$*, falls* $f \leq g$*.*

Beweis.

1) Sei (f_n) eine Folge von Treppenfunktionen mit $f_n \nearrow f$, also $f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Dann ist $cf = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(cf_n)$, daher

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{X}} (cf) d\mu &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{X}} (cf_n) d\mu\\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} c \int_{\mathcal{X}} f_n d\mu\\ &\overset{c\geq 0}{=} c \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{X}} f_n d\mu\\ &= c\int_{\mathcal{X}} f d\mu.\end{aligned}$$

2) Es sei $f = \sup_n f_n$, $g = \sup_n g_n$ mit Treppenfunktionen f_n, g_n wie in Definition 3.2.3. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{X}} f d\mu + \int_{\mathcal{X}} g d\mu &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{X}} f_n d\mu + \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{X}} g_n d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{X}} f_n d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{X}} g_n d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\int_{\mathcal{X}} f_n d\mu + \int_{\mathcal{X}} g_n d\mu \Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{X}} (f_n + g_n) d\mu \\
&= \int_{\mathcal{X}} (f+g) d\mu,
\end{aligned}$$

da $f + g = \sup_n (f_n + g_n)$ und $f_n + g_n$ eine Treppenfunktion ist.

3) Es sei $f = \sup_n f_n$, $g = \sup_n g_n$ mit Treppenfunktionen f_n, g_n wie in Definition 3.2.3. Dann gilt $f_k \le \sup_n g_n$ fuer jedes $k \in \mathbb{N}$, also

$$\int_{\mathcal{X}} f_k d\mu \le \int_{\mathcal{X}} g d\mu$$

fuer jedes $k \in \mathbb{N}$, daher $\int_{\mathcal{X}} f d\mu \le \int_{\mathcal{X}} g d\mu$.

□

3.3 Lebesgue-integrierbare Funktionen

3.3.1 Lebesgue-integrierbare Funktionen

Definition 3.3.1 *Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ messbar. Wir sagen, dass f (Lebesgue-) integrierbar ist (ueber $\mathcal{X}$ bezueglich μ), falls*

$$\int_{\mathcal{X}} f^+ d\mu \quad \textit{und} \quad \int_{\mathcal{X}} f^- d\mu$$

endlich sind, und wir definieren $\int_{\mathcal{X}} f d\mu := \int_{\mathcal{X}} f^+ d\mu - \int_{\mathcal{X}} f^- d\mu.$

Beachte:

Die Definition von $\int_{\mathcal{X}} f d\mu$ bleibt sinnvoll, wenn entweder $\int_{\mathcal{X}} f^+ d\mu = \infty$ oder $\int_{\mathcal{X}} f^- d\mu = \infty$ (nicht beides $= \infty$).

Satz 3.3.1 *Sei* $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Massraum,* $f : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ *messbar. Dann sind aequivalent:*

1) f *ist integrierbar (ueber* $\mathcal{X}$ *bezueglich* μ*).*
2) f^+ *und* f^- *sind integrierbar.*
3) *Es gibt integrierbare Funktionen* $u, v : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ *mit* $u \geq 0$*,* $v \geq 0$ *und* $f = u - v$*.*
4) *Es gibt eine integrierbare Funktion* $F : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ *mit* $|f| \leq F$*.*
5) $|f|$ *ist integrierbar.*

Beweis.
1) $\Leftrightarrow$ **2**) Definition 3.3.1.
2) $\Rightarrow$ **3**) $u = f^+$ und $v = f^-$.
3) $\Rightarrow$ **4**) $F = u + v$ ist integrierbar (Satz 3.2.3) und

$$\begin{aligned} |f| &= |u - v| \\ &\leq |u| + |v| \\ &= F. \end{aligned}$$

4) $\Rightarrow$ **5**) $(|f|)^+ = |f|$, $(|f|)^- = 0$ und

$$0 \leq \int_{\mathcal{X}} |f| d\mu \leq \int_{\mathcal{X}} F d\mu < \infty.$$

5) $\Rightarrow$ **2**) Wegen Folgerung 3.1.2 sind die Funktionen f^+, f^- messbar, und es gilt $0 \leq f^\pm \leq |f|$, also ist

$$0 \leq \int_{\mathcal{X}} f^\pm d\mu \leq \int_{\mathcal{X}} |f| d\mu < +\infty.$$

Wegen $(f^\pm)^+ = f^\pm$, $(f^\pm)^- = 0$ folgt, dass f^+, f^- integrierbar sind.

□

3.3.2 Eigenschaften

Satz 3.3.2 *Sei* $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Massraum,* $f, g : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ *integrierbar ueber* $\mathcal{X}$*. Dann gelten die Aussagen:*

1) cf *ist fuer jedes* $c \in \mathbb{R}$ *integrierbar mit* $\displaystyle\int_{\mathcal{X}} (cf) d\mu = c \int_{\mathcal{X}} f d\mu$*.*
2) $f + g$ *ist integrierbar mit* $\displaystyle\int_{\mathcal{X}} (f + g) d\mu = \int_{\mathcal{X}} f d\mu + \int_{\mathcal{X}} g d\mu$*.*

3) $\sup(f,g)$, $\inf(f,g)$ *sind integrierbar.*

4) $f \leq g$ *impliziert* $\int_{\mathcal{X}} f d\mu \leq \int_{\mathcal{X}} g d\mu.$

5) $|\int_{\mathcal{X}} f d\mu| \leq \int_{\mathcal{X}} |f| d\mu.$

Beweis.

1) Fuer $c \geq 0$ gilt $(cf)^+ = cf^+$, $(cf)^- = cf^-$, fuer $c < 0$ gilt $(cf)^+ = (-c)f^-$, $(cf)^- = (-c)f^+$. Die Integrale

$$\int_{\mathcal{X}} (cf)^{\pm} d\mu$$

sind also nach Satz 3.2.3, 1) stets endlich. Folglich ist cf integrierbar, und Satz 3.2.3, 1) liefert fuer $c \geq 0$ (fuer $c < 0$ analog!)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{X}} (cf) d\mu &= \int_{\mathcal{X}} (cf)^+ d\mu - \int_{\mathcal{X}} (cf)^- d\mu \\
&= c \int_{\mathcal{X}} f^+ d\mu - c \int_{\mathcal{X}} f^- d\mu \\
&= c\Big(\int_{\mathcal{X}} f^+ d\mu - \int_{\mathcal{X}} f^- d\mu\Big) \\
&= c \int_{\mathcal{X}} f d\mu.
\end{aligned}$$

2) Wir haben $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$, daher $f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$. Da

$$\int_{\mathcal{X}} f^{\pm} d\mu, \quad \int_{\mathcal{X}} g^{\pm} d\mu$$

saemtlich endlich sind, gilt dies nach Satz 3.2.3, 2) auch fuer

$$\int_{\mathcal{X}} \left(f^{\pm} + g^{\pm}\right) d\mu,$$

d.h. die Funktionen $u := f^+ + g^+$ und $v := f^- + g^-$ sind integrierbar. Wegen $u \geq 0$, $v \geq 0$ und $f + g = u - v$ ist damit $f + g$ integrierbar (Satz 3.3.1!). Ferner

$$u - v = (f + g)^+ - (f + g)^-,$$

also ist $u + (f + g)^- = v + (f + g)^+$, wobei alle Summanden ≥ 0 sind. Nach Satz 3.2.3, 2) gilt

$$\int_{\mathcal{X}} u d\mu + \int_{\mathcal{X}} (f + g)^- d\mu = \int_{\mathcal{X}} v d\mu + \int_{\mathcal{X}} (f + g)^+ d\mu,$$

daher

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{X}}(f+g)d\mu &= \int_{\mathcal{X}}(f+g)^{+}d\mu - \int_{\mathcal{X}}(f+g)^{-}d\mu \\ &= \int_{\mathcal{X}} ud\mu - \int_{\mathcal{X}} vd\mu \\ &= \int_{\mathcal{X}} f^{+}d\mu + \int_{\mathcal{X}} g^{+}d\mu - \int_{\mathcal{X}} f^{-}d\mu - \int_{\mathcal{X}} g^{-}d\mu \\ &= \int_{\mathcal{X}} fd\mu + \int_{\mathcal{X}} gd\mu.\end{aligned}$$

3) Die Funktionen $\sup(f,g)$ und $\inf(f,g)$ sind messbar und es gilt

$$\begin{aligned}|\sup(f,g)| &\leq |f|+|g|, \\ |\inf(f,g)| &\leq |f|+|g|.\end{aligned}$$

Ferner sind $|f|$ und $|g|$, also nach 2) auch $|f|+|g|$ integrierbar. Nach Satz 3.3.1 sind $\sup(f,g)$ und $\inf(f,g)$ integrierbar.

4) Da $f \leq g$ ist, gelten $f^{+} \leq g^{+}$ und $f^{-} \geq g^{-}$, also nach Satz 3.2.3, 3)

$$\int_{\mathcal{X}}(f^{+}+g^{-})d\mu \leq \int_{\mathcal{X}}(f^{-}+g^{+})d\mu,$$

folglich

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{X}} fd\mu &= \int_{\mathcal{X}} f^{+}d\mu - \int_{\mathcal{X}} f^{-}d\mu \\ &\leq \int_{\mathcal{X}} g^{+}d\mu - \int_{\mathcal{X}} g^{-}d\mu \\ &= \int_{\mathcal{X}} gd\mu.\end{aligned}$$

5) Wir haben $\pm f \leq |f|$, also ist $\pm \int_{\mathcal{X}} fd\mu \leq \int_{\mathcal{X}} |f|d\mu$ nach 4).

□

3.3.3 Das Lebesgue-Integral ueber eine Teilmenge

Mit Satz 3.3.2 ist die Konstruktion des Lebesgue-Integrals endgueltig abgeschlossen. Allerdings koennen wir bisher nur Integrale von Funktionen ueber die ganze Grundmenge $\mathcal{X}$ bilden. Haeufig (z.B. wenn in unserer Standardsituation $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$) will man jedoch nur ueber Teilmengen von $\mathcal{X}$, typischerweise Elemente von $\mathcal{A}$, integrieren. Hier hilft die folgende ganz natuerliche Konstruktion.

Definition 3.3.2 *Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, $f : \mathcal{X} \to [-\infty, +\infty]$ messbar, $A \subset \mathcal{X}$ messbar. Wir definieren dann*

$$\int_A f d\mu := \int_{\mathcal{X}} f \chi_A \, d\mu,$$

falls die rechte Seite definiert ist.

$f \cdot \chi_A$ ist wegen $A \in \mathcal{A}$ als Produkt messbarer Funktionen messbar. Ferner gilt $(f\chi_A)^{\pm} = f^{\pm}\chi_A$. Die rechte Seite macht daher Sinn in folgenden Fallen:

1) $f \geq 0$ (wegen Definition 3.2.3);

2) f ist ueber $\mathcal{X}$ integrierbar (nach Definition 3.3.1, da $(f\chi_A)^{\pm} \leq f^{\pm}$).

Lemma 3.3.1 *Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, $f : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ messbar, $A, B \subset \mathcal{X}$ messbar. Dann gilt, falls $f \geq 0$ oder f integrierbar, dass*

$$\int_{A \cup B} f d\mu + \int_{A \cap B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

Beweis. Zunaechst sind $A \cup B$, $A \cap B$ messbar, so dass alle vorkommenden Integrale existieren. Ferner gilt offenbar die Identitaet $\chi_{A \cup B} + \chi_{A \cap B} = \chi_A + \chi_B$, woraus die Behauptung folgt.

$\square$

Kapitel 4

Konvergenzsaetze

Das folgende Kapitel (insbesondere die Saetze von Beppo-Levi, Fatou und Lebesgue, sowie die Konstruktion der fuer die gesamte Analysis fundamentalen L^p-Raeume) bildet das "Herzstueck" der Lebesgue-Theorie. Hauptziel ist die Klaerung der Frage, wann das Integral mit Grenzprozessen vertauscht werden darf, z.B. ob

$$f_n \to f \overset{?}{\Rightarrow} \int_{\mathcal{X}} f_n d\mu \to \int_{\mathcal{X}} f d\mu.$$

4.1 Konvergenzsaetze

4.1.1 Der Satz von Beppo Levi ueber monotone Konvergenz

Satz 4.1.1 *Sei* $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Massraum,* $f_n : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ *eine Folge messbarer Funktionen mit* $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ *fuer alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann gilt*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{X}} f_n \, d\mu = \int_{\mathcal{X}} \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu.$$

Beweis. Sei $f := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Nach Satz 3.1.6 ist f messbar, und $f \geq 0$.

"$\geq$" Seien $f_n \leq f$ fuer alle n. Nach Satz 3.2.3, 3) gilt $\int_{\mathcal{X}} f_n d\mu \leq \int_{\mathcal{X}} f d\mu$, also ist

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{X}} f_n d\mu \leq \int_{\mathcal{X}} f d\mu.$$

"$\leq$" Seien $(f_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen von Treppenfunktionen, so dass fuer jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 \leq f_{n,k} \leq f_{n,k+1}$ und

$$f_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_{n,k}.$$

Wir setzen

$$g_n = \sup_{1\leq m\leq n} f_{m,n}.$$

Dann ist g_n wiederum eine Treppenfunktion, und $0 \leq g_n \leq g_{n+1}$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$. Fuer $j,k \in \mathbb{N}$ mit $n = \max\{j,k\}$ gilt dann

$$\begin{aligned} f_{j,k} &\leq f_{j,n} \\ &\leq g_n \\ &= \sup_{1\leq m\leq n} f_{m,n} \\ &\leq \sup_{1\leq m\leq n} f_m \\ &\leq f_n, \end{aligned}$$

also ist $f = \sup\limits_j \sup\limits_k f_{j,k} \leq \sup\limits_n g_n$ und nach Satz 3.2.3

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} f d\mu &\leq \int_{\mathcal{X}} \sup_n g_n \, d\mu \\ &\overset{\text{Definition 3.2.3}}{=} \sup_n \int_{\mathcal{X}} g_n \, d\mu \\ &\leq \sup_n \int_{\mathcal{X}} f_n \, d\mu. \end{aligned}$$

□

Folgerung 4.1.1 *Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, $f_n : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ eine Folge messbarer Funktionen mit $f_n \geq 0$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f := \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ messbar und*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathcal{X}} f_n \, d\mu = \int_{\mathcal{X}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu.$$

Beweis. Setze $g_n := \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$. Dann gilt $g_n \nearrow f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$. Behauptung folgt aus Satz 4.1.1.

□

4.1.2 Nullmengen

Fuer den weiteren Ausbau der Theorie wird sich der nun folgende Begriff der "Nullmenge" als zentral erweisen.

Definition 4.1.1 *Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum.*

1) *$N \in \mathcal{A}$ heisst μ-Nullmenge, falls $\mu(N) = 0$.*

2) *Wir sagen, dass eine Eigenschaft (E) von Punkten $x \in \mathcal{X}$ "fast ueberall" (genauer: μ-fast ueberall; kurz μ-f.ü.) auf $\mathcal{X}$ gilt, falls es eine μ-Nullmenge N gibt mit $\{x \in \mathcal{X} :$ (E) gilt nicht in $x\} \subset N$.*

Beispiel 4.1.1 $f = g$ μ-f.ü. genau dann, wenn es eine Menge $N \in \mathcal{A}$ gibt mit $\mu(N) = 0$ und $\{x \in \mathcal{X} : f(x) \neq g(x)\} \subset N$.

Beispiel 4.1.2 $f < \infty$ μ-f.ü. genau dann, wenn es eine Menge $N \in \mathcal{A}$ gibt mit $\mu(N) = 0$ und $\{x \in \mathcal{X} : f(x) = \infty\} \subset N$.

4.1.3 Funktionen mit Integral Null

Der folgende Satz 4.1.2 besagt, dass es bei der Integration bezueglich des Masses μ "auf μ-Nullmengen nicht ankommt". Man kann integrierbare Funktionen auf solchen beliebig abaendern, ohne dass sich der Wert des Integrals aendert.

Satz 4.1.2 *Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, $f : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ messbar mit $f \geq 0$. Dann gilt:*

$$\int_{\mathcal{X}} f d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \ \mu\text{-fast ueberall.}$$

Beweis. Sei $N := \{f \neq 0\}$. Die Menge N ist messbar.
"$\Rightarrow$" Sei $\displaystyle\int_{\mathcal{X}} f d\mu = 0$. Wir setzen

$$A_n := \{f \geq \frac{1}{n}\}.$$

Dann gilt $A_n \nearrow N$ und $0 \leq \frac{1}{n}\chi_{A_n} \leq f$, also

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{X}} f d\mu \\ &\overset{\text{Satz 3.2.3}}{\geq} \int_{\mathcal{X}} \frac{1}{n}\chi_{A_n}\, d\mu \\ &= \frac{1}{n}\,\mu(A_n) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

daher $\mu(N) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.
"$\Leftarrow$" Sei $f = 0$ μ-fast ueberall. Dann ist $\mu(N) = 0$. Wir setzen

$$f_n := n\chi_N,$$

f_n ist messbar. Es gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls} \quad f(x) \neq 0, \\ 0, & \text{falls} \quad f(x) = 0, \end{cases} \qquad \text{(messbar!)}$$

also $0 \le f \le \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, daher

$$\begin{aligned} 0 &\overset{\text{Satz 3.2.3}}{\le} \int_{\mathcal{X}} f d\mu \\ &\overset{\text{Satz 3.2.3}}{\le} \int_{\mathcal{X}} \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu \\ &\overset{\text{Satz 4.1.1}}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{X}} f_n \, d\mu \\ &= 0, \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} f_n d\mu &= \int_{\mathcal{X}} n\chi_N \, d\mu \\ &= n\mu(N) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

4.2 $\mathcal{L}^p$-Raeume

4.2.1 Der $\mathcal{L}^p$-Raum

Wir definieren nunmehr:

Definition 4.2.1 *Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, $f : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ messbar, $p \in [1, \infty)$. Wir definieren $N_p(f) \in [0, \infty]$ durch*

$$N_p(f) := \Big(\int_{\mathcal{X}} |f|^p d\mu \Big)^{1/p}$$

und $\mathcal{L}^p(\mathcal{X}; \mu) := \Big\{ f : \, f : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty] \text{ messbar}, \, N_p(f) < \infty \Big\}.$

Fuer den Spezialfall $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ schreiben wir $\mathcal{L}^p(\mathcal{X}) := \mathcal{L}^p(\mathcal{X}; \lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Mass im $\mathbb{R}^n$ ist.

Offenbar gilt: $f \in \mathcal{L}^p(\mathcal{X}; \mu)$ genau dann, wenn $|f|^p$ integrierbar (ueber $\mathcal{X}$ bezueglich μ) ist, und aus der Definition folgt $N_p(cf) = |c| \, N_p(f)$ fuer alle $c \in \mathbb{R}$, falls f messbar ist. Ist also $f \in \mathcal{L}^p(\mathcal{X}; \mu)$, so gilt $cf \in \mathcal{L}^p(\mathcal{X}; \mu)$ fuer alle $c \in \mathbb{R}$.

Ferner liefert Satz 4.1.2, dass $N_p(f) = 0$ genau dann gilt, wenn $f = 0$ μ-f.ü. auf $\mathcal{X}$ ist.

4.2.2 Höldersche Ungleichung

Satz 4.2.1 *Seien $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, $f, g : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ messbar und $p, q > 1$ mit $1/p + 1/q = 1$. Dann gilt*

$$\int_{\mathcal{X}} |fg| \, d\mu \leq N_p(f) \, N_q(g). \tag{4.2.1}$$

<u>Beachte</u>: Das Integral auf der linken Seite existiert wegen Definition 3.2.3, da $|fg| \geq 0$, messbar.

Beweis. Die Aussage ist trivial, falls $N_p(f) = +\infty$ oder $N_q(g) = +\infty$ ist. Falls $N_p(f) = 0$ oder $N_q(g) = 0$ gilt, folgt $f = 0$ bzw. $g = 0$ μ-f.ü., also $|fg| = 0$ μ-f.ü., und nach Satz 4.1.2 hat (4.2.1) die triviale Form $0 \leq 0$. Sei also $0 < N_p(f), N_q(g) < +\infty$. Nach der Young'schen Ungleichung[1] gilt fuer alle $x \in \mathcal{X}$:

$$\frac{|f(x)g(x)|}{N_p(f)N_q(g)} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{(N_p(f))^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{(N_q(g))^q}.$$

Integrieren ueber $\mathcal{X}$ liefert

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\mathcal{X}} |f(x)g(x)| d\mu}{N_p(f)N_q(g)} &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1, \end{aligned}$$

daher die Behauptung.

□

4.2.3 Minkowskische Ungleichung

Satz 4.2.2 *Seien $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, $f, g : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ messbar, $f + g$ ueberall definiert, $p \geq 1$. Dann gilt*

$$\left(\int_{\mathcal{X}} |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathcal{X}} |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_{\mathcal{X}} |g|^p \, d\mu \right)^{1/p},$$

d.h. $N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$.

Beweis.
I Wegen $|f+g| \leq |f| + |g|$, also

$$\left(\int_{\mathcal{X}} |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathcal{X}} (|f| + |g|)^p \, d\mu \right)^{1/p},$$

[1] $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$ fuer alle $a, b \geq 0$, siehe Analysis I.

koennen wir o.B.d.A. $f \geq 0$, $g \geq 0$ annehmen und dass f^p, g^p integrierbar sind (sonst ist die Behauptung offenbar trivial!).

II Es gilt

$$\begin{aligned}(f+g)^p &\leq (2\max\{f,g\})^p \\ &\leq 2^p \max\{f^p, g^p\} \\ &\leq 2^p\,(f^p+g^p),\end{aligned}$$

d.h. nach Satz 3.3.1: $(f+g)^p$ ist integrierbar.

III Mit $q = \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \frac{p}{p-1}$ folgt

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{X}} (f+g)^p\,d\mu \\ &= \int_{\mathcal{X}} f(f+g)^{p-1}\,d\mu + \int_{\mathcal{X}} g(f+g)^{p-1}\,d\mu \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} N_p(f)\Big(\int_{\mathcal{X}} (f+g)^{q(p-1)}\,d\mu\Big)^{1/q} + N_p(g)\Big(\int_{\mathcal{X}} (f+g)^{q(p-1)}\,d\mu\Big)^{1/q} \\ &= (N_p(f)+N_p(g))\Big(\int_{\mathcal{X}} (f+g)^p\,d\mu\Big)^{1/q}.\end{aligned}$$

Da $f+g$ integrierbar ist, ergibt sich

$$\begin{aligned}N_p(f+g) &= \Big(\int_{\mathcal{X}} (f+g)^p\,d\mu\Big)^{1-1/q} \\ &\leq N_p(f)+N_p(g).\end{aligned}$$

□

4.3 Nullmengen

4.3.1 Eigenschaften

Wir zeigen nunmehr einige Aussagen ueber den Umgang mit Nullmengen.

Satz 4.3.1 *Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum.*

1) *Ist N eine Nullmenge und $M \in \mathcal{A}$ mit $M \subset N$, so ist M eine Nullmenge.*

2) *Sind $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, $\mu(M_n) = 0$ fuer alle n, so ist $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ eine Nullmenge.*

Beweis. 1) ist wegen $\chi_M \leq \chi_N$ trivial. Zu 2): Folgerung 4.1.1 liefert

$$\begin{aligned}
\mu(M) &= \int_{\mathcal{X}} \chi_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n} d\mu \\
&\leq \int_{\mathcal{X}} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{M_n}\, d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathcal{X}} \chi_{M_n}\, d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

4.3.2 Relevanz fuers Lebesgue-Integral

Satz 4.3.2 *Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, $f, g : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ messbar, $1 \leq p < \infty$. Dann gilt:*

1) *Ist N eine μ-Nullmenge, so ist $f\chi_N$ integrierbar und $\int_N f d\mu = 0$.*

2) *Ist $f = g$ μ-fast ueberall, $f \geq 0$ oder f integrierbar, so gilt*

$$\int_{\mathcal{X}} f d\mu = \int_{\mathcal{X}} g d\mu.$$

3) *Ist $f \in \mathcal{L}^p(\mathcal{X}; \mu)$, so ist $\{|f| = +\infty\}$ eine μ-Nullmenge.*

4) *Ist $|f| \leq g$ μ-fast ueberall, g integrierbar, so ist f integrierbar mit*

$$\int_{\mathcal{X}} |f| d\mu \leq \int_{\mathcal{X}} g d\mu.$$

5) *Sind $M, N \in \mathcal{A}$, $M \Delta N := (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$ eine μ-Nullmenge und $f \geq 0$ oder f integrierbar, so gilt*

$$\int_M f d\mu = \int_N f d\mu.$$

Beweis.

1) Sei $f \geq 0$. Wir haben $f\chi_N \geq 0$, $f\chi_N = 0$ μ-fast ueberall. Nach Satz 4.1.2 ergibt sich

$$\int_{\mathcal{X}} f\chi_N\, d\mu = 0.$$

Sonst folgt analog $\int_N f^{\pm} d\mu = 0$, daher $\int_N f d\mu = 0$.

2) Sei $N = \{f \neq g\}$. N ist eine μ-Nullmenge.

Sei zunaechst $f \geq 0$. Es ist $\{g^- \neq 0\} = \{g < 0\} \subset N$, also

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{X}} g^- d\mu &= \int_N g^- d\mu \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ferner hat man

$$\int_{\mathcal{X}} g^+ d\mu = \int_{\{f=g\}} g^+ d\mu + \int_N g^+ d\mu = \int_{\{f=g\}} f d\mu + \int_N f d\mu = \int_{\mathcal{X}} f d\mu,$$

also ist $\int_{\mathcal{X}} g d\mu$ wohldefiniert und gleich $\int_{\mathcal{X}} f d\mu$.

Sei f integrierbar. Da $f^+ = g^+$ μ-fast ueberall und $f^- = g^-$ μ-fast ueberall ist, folgt

$$\int_{\mathcal{X}} f^{\pm} d\mu = \int_{\mathcal{X}} g^{\pm} d\mu.$$

Also ist g integrierbar und $\int_{\mathcal{X}} f d\mu = \int_{\mathcal{X}} g d\mu$.

3) Sei $N = \{|f| = \infty\}$. Dann ist $0 \leq n\chi_N \leq |f|^p$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$\begin{aligned}0 &\leq n\mu(N) \\ &= \int_{\mathcal{X}} n\chi_N \, d\mu \\ &\leq \int_{\mathcal{X}} |f|^p \, d\mu \\ &< \infty\end{aligned}$$

fuer alle $n \in \mathbb{N}$, also $\mu(N) = 0$.

4)

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{X}} |f| \, d\mu &\leq \int_{\mathcal{X}} \max\{|f|, g\} \, d\mu \\ &= \int_{\mathcal{X}} g \, d\mu \\ &< \infty,\end{aligned}$$

da $\max\{|f|, g\} = g$ μ-fast ueberall.

5) Uebungsaufgabe!

□

4.4 Konstruktion normierter Raeume L^p

4.4.1 Aequivalenzrelation

Wir definieren eine Aequivalenzrelation "$\sim$" auf $\mathcal{L}(\mathcal{X};\mu)$ durch die Festlegung

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad f = g \ \mu\text{-fast ueberall.}$$

"$\sim$" ist eine Aequivalenzrelation. Denn "$f \sim f$" und "$f \sim g$" genau dann, wenn "$g \sim f$", ist klar. Ferner seien "$f \sim g$" und "$g \sim h$". Dann gibt es μ-Nullmengen N_1 und N_2 mit $f(x) = g(x)$ fuer alle $x \in \mathcal{X} \setminus N_1$ und $g(x) = h(x)$ fuer alle $x \in \mathcal{X} \setminus N_2$. Setzen wir $N = N_1 \cup N_2$. Das ist eine μ-Nullmenge und es gilt $f(x) = g(x) = h(x)$ fuer alle $x \in \mathcal{X} \setminus N$. Also ist $f = h$ μ-fast ueberall, daher $f \sim h$.

Wir definieren nunmehr:

$$L^p(\mathcal{X};\mu) := \mathcal{L}^p(\mathcal{X};\mu)/\sim,$$

d.h. $L^p(\mathcal{X};\mu)$ besteht aus Aequivalenzklassen $[f]$ μ-fast ueberall gleicher Funktionen. Fuer $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ setzen wir speziell $L^p(\mathcal{X}) := L^p(\mathcal{X};\lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Mass auf $\mathcal{X}$ ist.

Jede Aequivalenzklasse enthaelt einen Repraesentanten f, der nur endliche Werte annimmt, da $\mu(\{|f| = \infty\}) = 0$ fuer $f \in \mathcal{L}^p(\mathcal{X};\mu)$.

Es gilt wegen Satz 4.3.2, 2): Ist $f \sim g$, so gilt

$$\int_{\mathcal{X}} f d\mu = \int_{\mathcal{X}} g d\mu.$$

4.4.2 Beispiele

1) Ist N eine λ-Nullmenge, so ist $\chi_N = 0$ λ-fast ueberall, also $[\chi_N] = [0]$ in $L^p(\mathcal{X})$.

2) Ist $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ durch die Vorschrift

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls} \quad x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

gegeben, so ist $[f] = [0]$.

4.4.3 Der Raum $L^p(\mathcal{X};\mu)$

$\sim$ ist mit Addition und Skalarmultiplikation vertraeglich:

1) Ist $f \sim g$ und $c \in \mathbb{R}$, so gilt $\{cf \neq cg\} \subset \{f \neq g\}$, also $cf \sim cg$.

2) Sind $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$ und $f_1 + g_1$, $f_2 + g_2$ definiert, so gilt offenbar $\{f_1+f_2 \neq g_1+g_2\} \subset \{f_1 \neq g_1\} \cup \{f_2 \neq g_2\}$, also $\mu(\{f_1+f_2 \neq g_1+g_2\}) = 0$, daher ist $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$.

Deswegen ist $L^p(\mathcal{X};\mu)$ ein Vektorraum mit

$$\begin{aligned} c[f] &= [cf], \\ [f] + [g] &= [f + g] \end{aligned}$$

und $N_p(f) = N_p(g)$ fuer alle f, g mit $f \sim g$. Wir definieren daher

$$\|[f]\|_p := N_p(f) = \Big(\int_{\mathcal{X}} |f|^p d\mu\Big)^{1/p}$$

($f \in \mathcal{L}^p(\mathcal{X};\mu)$ ist ein Repraesentant der Klasse $[f]$).

Satz 4.4.1 *$\|\cdot\|_p$ ist eine Norm auf $L^p(\mathcal{X};\mu)$.*

Beweis. Zunaechst gilt $\|[f]\|_p \geq 0$ fuer alle $[f] \in L^p(\mathcal{X};\mu)$, und $\|[f]\|_p = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ μ-f.ü., also $[f] = [0]$.

Fuer alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \|c[f]\|_p &= \|[cf]\|_p \\ &= N_p(cf) \\ &= |c|\, N_p(f) \\ &= |c|\, \|[f]\|_p. \end{aligned}$$

Schliesslich liefert die Minkowski'sche Ungleichung

$$\begin{aligned} \|[f] + [g]\|_p &= \|[f + g]\|_p \\ &= N_p(f + g) \\ &\leq N_p(f) + N_p(g) \\ &= \|[f]\|_p + \|[g]\|_p. \end{aligned}$$

□

Resultat: $(L^p(\mathcal{X};\mu), \|\cdot\|_p)$ ist ein normierter Raum.

Ueblicherweise schreibt man "$f \in L^p(\mathcal{X};\mu)$" anstelle von "$[f] \in L^p(\mathcal{X};\mu)$", d.h. man identifiziert die Aequivalenzklassen von Funktionen mit einem Repraesentanten. Man muss dann beachten, dass die Elemente $f \in L^p(\mathcal{X};\mu)$ nur bis auf eine μ-Nullmenge wohldefiniert sind! Z.B. bedeutet dann "$f = g$ in $L^p(\mathcal{X};\mu)$", dass $f, g \in L^p(\mathcal{X};\mu)$ und $f(x) = g(x)$ μ-f.ü. in $\mathcal{X}$. Fuer ein Element $f \in L^p(\mathcal{X};\mu)$ ist also die Aussage "f ist stetig auf $\mathcal{X}$" zunaechst nicht sinnvoll, da jede Aequivalenzklasse $[f]$ unstetige Funktionen enthaelt. Gemeint ist eigentlich in diesem Fall: "Die Aequivalenzklasse $[f]$ enthaelt eine stetige Funktion".

Nach Satz 4.3.2, 3) ist $\{|f| = \infty\}$ eine μ-Nullmenge fuer alle Funktionen $f \in \mathcal{L}^p(\mathcal{X};\mu)$. Daher enthaelt jede Aequivalenzklasse $[f] \in L^p(\mathcal{X};\mu)$ eine Funktion, welche nur endliche Werte annimmt. Die etwas nachlaessige Definition

$$L^p(\mathcal{X};\mu) = \{f : f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \int_{\mathcal{X}} |f|^p d\mu < \infty\}$$

ist also (bis auf das Verschweigen der Aequivalenzklassen) mit der obigen identisch.

4.4.4 Raum der beschraenkten Funktionen

Definition 4.4.1 *Sei $(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$ ein Massraum. Fuer $f : \mathcal{X} \to [-\infty,\infty]$ definieren wir das wesentliche Supremum durch*

$$\operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathcal{X}} f(x) := \inf\{M : M \in [-\infty,\infty],\ f \leq M\ \mu\text{-fast ueberall}\}.$$

Unter dem Raum $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{X};\mu)$ der messbaren, wesentlich beschraenkten Funktionen versteht man

$$\mathcal{L}^\infty(\mathcal{X};\mu) := \{f : f : \mathcal{X} \to [-\infty,\infty], \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathcal{X}} |f(x)| < \infty.\}$$

Wir definieren auch $L^\infty(\mathcal{X};\mu) := \mathcal{L}^\infty(\mathcal{X};\mu)/\sim$, mit derselben Aequivalenzrelation ($f \sim g \Leftrightarrow f = g$ μ-fast ueberall) wie in der Definition von L^p.

Satz 4.4.2 *Sei $(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$ ein Massraum. Dann ist $L^\infty(\mathcal{X};\mu)$ mit*

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathcal{X}} |f(x)|$$

ein normierter Raum.

Beweis. Uebung.

□

4.5 Konvergenzbegriffe im L^p

4.5.1 Punktweise Konvergenz fast ueberall

Sei $(\mathcal{X},\mathcal{A},\mu)$ ein Massraum und $f_n : \mathcal{X} \to [-\infty,\infty]$ eine Folge messbarer Funktionen. Man sagt, f_n konvergiere gegen f μ-fast ueberall, falls

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

fuer μ-fast alle $x \in \mathcal{X}$.

Dieser Konvergenzbegriff ist offenbar nicht nur in $\mathcal{L}^p(\mathcal{X};\mu)$, sondern auch in $L^p(\mathcal{X};\mu)$ wohldefiniert (Uebung!).

4.5.2 Norm-Konvergenz

Man sagt, eine Folge $f_n \in L^p(\mathcal{X};\mu)$ konvergiere in L^p-Norm gegen $f \in L^p(\mathcal{X};\mu)$, falls $\|f_n - f\|_p \to 0$, d.h.

$$\Big(\int_{\mathcal{X}} |f_n - f|^p d\mu\Big)^{1/p} \to 0.$$

Lemma 4.5.1 *Seien $f, g \in L^p(\mathcal{X};\mu)$, $1 \le p \le \infty$. Ist $|f| \le |g|$ μ-f.ü., dann ist $\|f\|_p \le \|g\|_p$.*

Beweis. Fuer $p < \infty$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int_{\mathcal{X}} |f|^p d\mu \\ &\le \int_{\mathcal{X}} |g|^p d\mu \\ &= \|g\|_p^p. \end{aligned}$$

Fuer $p = \infty$ ist die Behauptung klar.

□

Satz 4.5.1 *Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, $A \subset \mathcal{X}$ messbar. Dann wird durch*

$$I_A(f) = \int_A f\, d\mu$$

ein stetiges lineares Funktional auf $L^1(\mathcal{X};\mu)$ definiert mit $|I_A(f)| \le \|f\|_1$ fuer alle $f \in L^1(\mathcal{X};\mu)$.

Insbesondere gilt: Ist (f_n) eine Folge in $L^1(\mathcal{X};\mu)$, die gegen eine Funktion $f \in L^1(\mathcal{X};\mu)$ in L^1-Norm konvergiert, so ist

$$\int_A f_n d\mu \to \int_A f d\mu.$$

Beweis. Es ist

$$I_A(f) = \int_{\mathcal{X}} \chi_A f\, d\mu,$$

also ist I_A linear, und

$$\begin{aligned} |I_A(f)| &\le \int_{\mathcal{X}} |\chi_A f|\, d\mu \\ &= \|\chi_A f\|_1 \\ &\overset{\text{Lemma 4.5.1}}{\le} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Stetigkeit in $f = 0$. Die Stetigkeit bei anderen Stellen folgt nun aus der Linearitaet (Analysis II).

□

4.5.3 Lemma von Fatou

Satz 4.5.2 (Lemma von Fatou) *Sei* $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Massraum, seien* $f_n : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ *messbar mit* $f_n \geq 0$. *Dann gilt*

$$\int_{\mathcal{X}} \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathcal{X}} f_n \, d\mu.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} f_n &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n} f_k \right) \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n, \end{aligned}$$

mit $g_n = \inf\limits_{k\geq n} f_k$. Nach Satz 3.1.6 ist g_n messbar fuer jedes n, und $0 \leq g_n \leq g_{n+1}$. Ferner gilt

$$\int_{\mathcal{X}} g_n d\mu \leq \int_{\mathcal{X}} f_k d\mu$$

fuer alle $k \geq n$, also

$$\int_{\mathcal{X}} g_n d\mu \leq \inf_{k\geq n} \int_{\mathcal{X}} f_k d\mu.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu &= \int_{\mathcal{X}} \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n \, d\mu \\ &\overset{\text{Satz von Beppo Levi}}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{X}} g_n \, d\mu \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n} \int_{\mathcal{X}} f_k d\mu \right) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathcal{X}} f_n d\mu. \end{aligned}$$

□

4.5.4 Konvergenz im L^p

Lemma 4.5.2 *Sei* (f_n) *eine Folge in* $L^p(\mathcal{X}; \mu)$ *mit* $f_n \to f \in L^p(\mathcal{X}; \mu)$ *in* L^p *-Norm. Dann gilt*

$$\int_A |f_n|^p d\mu \to \int_A |f|^p d\mu$$

fuer jede messbare Menge $A \in \mathcal{X}$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} |\|\chi_A f_n\|_p - \|\chi_A f\|_p| &\leq \|\chi_A(f_n - f)\|_p \\ &\overset{\text{Lemma 4.5.1}}{\leq} \|f_n - f\|_p, \end{aligned}$$

also

$$\int_A |f_n|^p d\mu = \|\chi_A f_n\|_p^p \to \|\chi_A f\|_p^p = \int_A |f|^p d\mu.$$

$\square$

Satz 4.5.3 *Sei (f_n) eine Folge in $L^p(\mathcal{X};\mu)$, $1 \leq p < \infty$, und $f_n \to f \in L^p(\mathcal{X};\mu)$ punktweise μ-fast ueberall. Dann gilt $f_n \to f$ in L^p-Norm genau dann, wenn*

$$\int_{\mathcal{X}} |f_n|^p d\mu \to \int_{\mathcal{X}} |f|^p d\mu.$$

Beweis.
"$\Rightarrow$" Lemma 4.5.2.
"$\Leftarrow$" Es ist $|f_n - f|^p \leq 2^p(|f_n|^p + |f|^p)$, also

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{X}} 2^{p+1}|f|^p d\mu \\ &= \int_{\mathcal{X}} \lim_{n\to\infty} (2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p)\, d\mu \\ &\overset{\text{Fatou's Lemma}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \Big(\int_{\mathcal{X}} 2^p|f_n|^p d\mu + \int_{\mathcal{X}} 2^p|f|^p d\mu - \int_{\mathcal{X}} |f_n - f|^p d\mu \Big) \\ &= 2^{p+1} \int_{\mathcal{X}} |f|^p d\mu + \liminf_{n\to\infty} \Big(- \int_{\mathcal{X}} |f_n - f|^p d\mu \Big), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \Big(- \int_{\mathcal{X}} |f_n - f|^p d\mu \Big) &\geq 0 \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \Big(- \int_{\mathcal{X}} |f_n - f|^p d\mu \Big). \end{aligned}$$

Da immer $\liminf(\cdot) \leq \limsup(\cdot)$, folgt

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \Big(- \int_{\mathcal{X}} |f_n - f|^p d\mu \Big) &= \limsup_{n\to\infty} \Big(- \int_{\mathcal{X}} |f_n - f|^p d\mu \Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big(- \int_{\mathcal{X}} |f_n - f|^p d\mu \Big), \end{aligned}$$

also

$$\|f_n - f\|_p = \Big(\int_{\mathcal{X}} |f_n - f|^p d\mu\Big)^{1/p} \to 0.$$

□

Beachte: Es wurde die folgende Rechenregel im $\mathbb{R}$ verwendet: Sind (a_n), (b_n) Folgen reeller Zahlen mit $a_n \to a$, so gilt

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

4.5.5 Satz von Lebesgue von der majorisierten Konvergenz

Der nun folgende Satz ist die wichtigste Aussage der gesamten Lebesgue-Theorie und Grund fuer ihre Bedeutung in der Analysis.

Satz 4.5.4 (Satz von Lebesgue) *Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, (f_n) eine Folge in $L^p(\mathcal{X};\mu)$, $1 \le p < \infty$, und es gelte:*

1) *f_n ist punktweise μ-fast ueberall konvergent;*

2) *es gibt ein $g \in L^p(\mathcal{X};\mu)$ mit $|f_n| \le g$ μ-fast ueberall fuer alle $n \in \mathbb{N}$.*

Dann gilt $f := \lim_{n\to\infty} f_n \in L^p(\mathcal{X};\mu)$, und $f_n \to f$ in L^p-Norm, d.h.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{X}} |f_n - f|^p d\mu = 0.$$

Speziell ist also im Falle $p = 1$:

$$\int_{\mathcal{X}} f\, d\mu = \int_{\mathcal{X}} \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{X}} f_n\, d\mu!$$

Beweis.
I Sei $\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^p(\mathcal{X};\mu)$ Repraesentant von $[f_n]$, und N eine μ-Nullmenge, so dass

$$\tilde{f}(x) := \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x)$$

fuer jedes $x \in \mathcal{X} \setminus N$ existiert. Wir setzen $\tilde{f}(x) = 0$ fuer alle $x \in N$. Nach Satz 3.1.4 und Satz 3.1.6 ist $\tilde{f}$ messbar. Da $|\tilde{f}| \le g$ μ-fast ueberall gilt, liefert Satz 3.3.1, 4): $\tilde{f} \in \mathcal{L}^p(\mathcal{X};\mu)$. Wir setzen $f := [\tilde{f}]$. Dann ist $f \in L^p(\mathcal{X};\mu)$ und $f_n \to f$ μ-fast ueberall in $\mathcal{X}$. Offenbar ist f von der speziellen Wahl der Repraesentanten $\tilde{f}_n \in [f_n]$ und der μ-Nullmenge N unabhaengig.

II Es gilt $0 \le |f_n - f|^p \le (g + |f|)^p =: h$ und $|f_n - f|^p \to 0$ μ-fast ueberall in $\mathcal{X}$. Daher ist

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{X}} h d\mu &= \int_{\mathcal{X}} \lim_{n\to\infty} (h - |f_n - f|^p)\, d\mu \\
&\overset{\text{Fatou's Lemma}}{\le} \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathcal{X}} (h - |f_n - f|^p)\, d\mu \\
&= \int_{\mathcal{X}} h d\mu + \liminf_{n\to\infty} \Big(- \int_{\mathcal{X}} |f_n - f|^p d\mu \Big),
\end{aligned}$$

da $\int_{\mathcal{X}} h d\mu < \infty$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \Big(- \int_{\mathcal{X}} |f_n - f|^p d\mu \Big) &\ge 0 \\
&\ge \limsup_{n\to\infty} \Big(- \int_{\mathcal{X}} |f_n - f|^p d\mu \Big),
\end{aligned}$$

d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{X}} |f_n - f|^p d\mu = 0.$$

$\square$

Laesst man 2) ersatzlos weg, so gilt die Aussage des Satzes von Lebesgue i.a. nicht.

Beispiel 4.5.1 (Gegenbeispiel) Sei $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ und $f_n = \chi_{[n.n+1]}$. Dann gilt $f_n \to 0$ punktweise in $\mathcal{X}$, aber

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n|^p d\lambda = 1 \not\to 0 = \int_{\mathbb{R}} 0^p d\lambda!$$

Kapitel 5

L^p-Raeume

5.1 Vollstaendigkeit von L^p-Raeumen

5.1.1 Vollstaendigkeit

Die nun folgende Aussage liefert, dass $(L^p(\mathcal{X};\mu), \|\cdot\|_p)$ fuer $1 \leq p < \infty$ vollstaendig, d.h. ein Banach-Raum ist. (Beachte, dass dies fuer $(C(\mathcal{X}), \|\cdot\|_p)$ nicht richtig ist!)

Satz 5.1.1 *Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in $(L^p(\mathcal{X};\mu), \|\cdot\|_p)$ mit $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es ein $f \in L^p(\mathcal{X};\mu)$ mit $f_n \to f$ in L^p-Norm, und es gibt eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_{n_k} \to f$ μ-fast ueberall.*

Beweis. Sei (f_{n_k}) eine Teilfolge mit $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k}$ fuer alle $k \in \mathbb{N}$ (moeglich, da (f_n) eine Cauchy-Folge ist). Wir setzen $g_k := f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ und

$$g := \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} |g_k|.$$

Dann gilt

$$g^p = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |g_k| \Big)^p,$$

also

$$\begin{aligned} \|g\|_p &= \Big(\int_{\mathcal{X}} |g|^p d\mu \Big)^{1/p} \\ &\overset{\text{Satz von Beppo Levi}}{=} \Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{X}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |g_k| \Big)^p d\mu \Big)^{1/p} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\| \sum_{k=1}^{n} |g_k| \Big\|_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \|g_k\|_p \\
&\leq \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \\
&= \quad 1.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $g \in L^p(\mathcal{X};\mu)$, also ist $\mu(\{g=\infty\}) = 0$ nach Satz 4.3.2. Das bedeutet, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|$$

konvergent fuer μ-fast alle $x \in \mathcal{X}$ ist, daher konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ fuer μ-fast alle $x \in \mathcal{X}$. Es ist aber

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} g_j(x),$$

also ist $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ μ-fast ueberall konvergent, und fuer jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
|f_{n_k}| &\leq |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{k-1} |g_j| \\
&\leq |f_{n_1}| + g \\
&\in L^p(\mathcal{X};\mu).
\end{aligned}$$

Aus dem Satz von Lebesgue folgt, dass $f = \lim_{k\to\infty} f_{n_k} \in L^p(\mathcal{X};\mu)$ und

$$\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_p = 0.$$

In jedem normierten Raum gilt aber, dass falls (f_n) eine Cauchy-Folge ist und $f_{n_k} \to f$ fuer eine Teilfolge gilt, so ist $f_n \to f$. Also gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

□

5.1.2 Beispiel

In der Situation von Satz 5.1.1 konvergiert (f_n) im allgemeinen nicht punktweise. Sei $\mathcal{X} = [0,1)$ und $\mu = \lambda$. Fuer $n = 2^k + j$, $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq j < 2^k$, setzen wir $f_n = \chi_{A_n}$, where $A_n = [j2^{-k}, (j+1)2^{-k})$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{X}} |f_n|^p d\lambda &= \lambda(A_n) \\ &= 2^{-k},\end{aligned}$$

daher $\|f_n\|_p \to 0$, also $f_n \to 0$ in L^p-Norm. Also ist (f_n) eine Cauchy-Folge, aber

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existiert fuer kein $x \in [0,1)$.

5.1.3 Hilbert-Raum L^2

Satz 5.1.2 *Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum. Dann ist $(L^p(\mathcal{X};\mu), \|\cdot\|_p)$ fuer $1 \le p \le +\infty$ ein Banach-Raum und fuer $p = 2$ ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathcal{X}} fg dx.$$

Beweis. Satz 5.1.1 liefert die Vollstaendigkeit fuer alle $1 \le p < +\infty$. Fuer $p = +\infty$: Uebungsaufgabe. Es bleibt zu zeigen, dass $(L^2(\mathcal{X};\mu), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbert-Raum, d.h. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $L^2(\mathcal{X};\mu)$ ist. Zunaechst liefert die Hölder'sche Ungleichung fuer $p = q = 2$, dass fuer alle Funktionen $f, g \in L^2(\mathcal{X};\mu)$ gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{X}} |fg| d\mu &\le \|f\|_2 \, \|g\|_2 \\ &< \infty,\end{aligned}$$

d.h. $fg \in L^1(\mathcal{X};\mu)$ und $\langle f, g\rangle$ ist wohl definiert. Ferner gelten

$$\begin{aligned}\langle f, f\rangle &= \int_{\mathcal{X}} |f|^2 d\mu \\ &= \|f\|_2^2 \\ &\ge 0,\end{aligned}$$

und $\langle f, f\rangle = 0$ genau dann, wenn $f = 0$. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist bilinear (Linearitaet des Integrals) und symmetrisch.

□

Fuer $1 \le p < +\infty$ heissen die Elemente $f \in L^p(\mathcal{X};\mu)$ "p-fach ueber $\mathcal{X}$ μ-integrierbar" (kurz: "p-fach integrierbar"), und fuer $p = 2$ "quadrat-integrierbar".

Die Raeume C und L^p sind mit ihren "Ablegern"

$$\begin{array}{rcll} C^k & = & \{f: \text{ die ersten } k \text{ Ableitungen von } f \text{ sind in } C\} & \text{bzw.} \\ W^{k,p} & = & \{f: \text{ die ersten } k \text{ "Ableitungen" von } f \text{ sind in } L^p\} & \end{array}$$

die wohl wichtigsten Funktionenraeume der Analysis (siehe Vorlesungen ueber Partielle Differentialgleichungen).

5.1.4 Die Raeume $L^p(A;\mu)$

Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $A \in \mathcal{A}$. Bisher haben wir nur Funktionen f betrachtet, die auf ganz $\mathcal{X}$ definiert sind. Wir setzen nunmehr fuer $1 \leq p < +\infty$

$$\mathcal{L}^p(A;\mu) := \{f: \ f\colon A \to [-\infty, \infty],\ \tilde{f} \in \mathcal{L}^p(\mathcal{X};\mu)\},$$

wobei

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls} \quad x \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar ist $\mathcal{L}^p(A;\mu)$ ein Vektorraum. Wir zeigen, dass wir $\mathcal{L}^p(A;\mu)$ als Teilvektorraum von $\mathcal{L}^p(\mathcal{X};\mu)$ auffassen koennen. Dazu sei

$$V := \{g: \ g \in \mathcal{L}^p(\mathcal{X};\mu),\ g\,|_{\mathcal{X}\setminus A} = 0\}.$$

Ferner definieren wir

$$e^+ : \mathcal{L}^p(A;\mu) \to \mathcal{L}^p(\mathcal{X};\mu)$$

durch $f \mapsto e^+(f) := \tilde{f}$. Dann ist e^+ linear, und wegen $f \neq g \Rightarrow \tilde{f} \neq \tilde{g}$ injektiv. Ferner gilt $f \in \mathcal{L}^p(A;\mu) \Rightarrow e^+(f) = \tilde{f} \in V$, also $e^+(\mathcal{L}^p(A;\mu)) \subset V$. Ist umgekehrt $g \in V$, so folgt $g\,|_A \in \mathcal{L}^p(A;\mu)$, und $e^+(g\,|_A) = g$. Folglich ist e^+ ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{L}^p(A;\mu)$ und V. Ferner gilt offenbar fuer alle $f \in \mathcal{L}^p(A;\mu)$

$$\begin{aligned} \|f\|_p &:= \|\tilde{f}\|_p \\ &:= \Big(\int_A |f|^p d\mu\Big)^{1/p} \\ &:= \Big(\int_{\mathcal{X}} |\tilde{f}|^p d\mu\Big)^{1/p} \\ &= \|e^+(f)\|_p. \end{aligned}$$

Wir identifizieren nunmehr $f \in \mathcal{L}^p(A;\mu)$ mit $e^+(f) = \tilde{f} \in V$ und fassen somit $\mathcal{L}^p(A;\mu)$ als Teilvektorraum von $\mathcal{L}^p(\mathcal{X};\mu)$ auf. Es gelten dann die Hölder'sche Ungleichung und die Minkowski'sche Ungleichung analog. Setzen wir ferner $L^p(A;\mu) := \{[f] : f \in \mathcal{L}(A;\mu)\}$, wobei $f = g$ in $L^p(A;\mu)$ genau dann ist, wenn $f = g$ μ-f.ü. in A. So ist $(L^p(A;\mu), \|\cdot\|_p)$ ein Banach-Raum. Dazu genuegt es zu zeigen, dass $L^p(A;\mu)$ in $(L^p(\mathcal{X};\mu), \|\cdot\|_p)$ abgeschlossen ist. Sei dazu $\{[f_n]\} \subset L^p(A;\mu)$ eine Folge mit $[f_n] \to [f] \in L^p(\mathcal{X};\mu)$ in L^p-Norm. Dann existieren nach Satz 5.1.1 eine Nullmenge $N \subset \mathcal{X}$ und eine Teilfolge $[f_{n_k}]$ mit $f_{n_k}(x) \to f(x)$ fuer alle $x \in \mathcal{X} \setminus N$. Es gilt $f(x) = 0$ fuer alle $x \in (\mathcal{X} \setminus A) \setminus N$. Sei

$$g(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x \in (\mathcal{X} \setminus A) \cap N, \\ f(x) & \text{sonst,} \end{cases}$$

siehe Fig. 5.1. Dann ist $g(x) = 0$ fuer alle $x \in \mathcal{X} \setminus A$, $g \in \mathcal{L}^p(\mathcal{X};\mu)$ und $g = f$

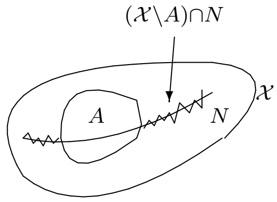


Fig. 5.1: Zu Beweis

μ-f.ü. auf $\mathcal{X}$. Folglich gilt $[f] = [g] \in \mathcal{L}^p(A;\mu)$.

5.2 Parameterabhaengige Integrale

Wir verwenden nun den Satz von Lebesgue, um sehr schlagkraeftige und wichtige Aussagen ueber parameterabhaengige Integrale herzuleiten. Man vergleiche z.B. die sehr allgemeine Aussage von Satz 5.2.2 mit dem relevanten Satz in Analysis II!

5.2.1 Stetigkeit

Satz 5.2.1 *Sei $(\mathcal{P}, d)$ ein metrischer Raum, $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f : \mathcal{P} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. Es gelte:*

1) $x \mapsto f(\wp, x)$ *ist integrierbar fuer alle* $\wp \in \mathcal{P}$;

2) $\wp \mapsto f(\wp, x)$ *ist stetig in* $\wp_0$ *fuer alle* $x \in \mathcal{X}$;

3) *es gibt ein* $g \in \mathcal{L}^1(\mathcal{X};\mu)$ *mit* $|f(\wp, x)| \le g(x)$ *fuer alle* $\wp \in \mathcal{P}$, $x \in \mathcal{X}$.

Dann wird durch

$$F(\wp) := \int_{\mathcal{X}} f(\wp, x) d\mu(x)$$

eine Funktion $F : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ definiert, welche stetig in $\wp_0$ ist. (Also: Gilt 2) fuer alle $\wp_0 \in \mathcal{P}$, so ist F stetig auf $\mathcal{P}$.)

Wir verwenden diese Schreibweise, um zu zeigen, bezueglich welcher Variablen integriert wird.

Beweis. Sei $(\wp_n)$ eine Folge in $\mathcal{P}$ mit $\wp_n \to \wp_0$. Wir definieren $f_n : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) := f(\wp_n, x)$ fuer $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $|f_n| \leq g$ und

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(\wp_0, x).$$

Also folgt aus dem Satz von Lebesgue $f_n \to f(\wp_0, x)$ in L^1-Norm, daher

$$\begin{aligned} F(\wp_n) &= \int_{\mathcal{X}} f_n(x) d\mu \\ &\overset{\text{Satz 4.5.1}}{\to} \int_{\mathcal{X}} f(\wp_0, x) d\mu \\ &= F(\wp_0). \end{aligned}$$

□

5.2.2 Differenzierbarkeit

Satz 5.2.2 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, $f : U \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$. Es gelte:*

1) *$x \mapsto f(\wp, x)$ ist integrierbar fuer alle $\wp \in U$;*

2) *$\partial_{\wp_j} f(\wp, x)$ existiert fuer alle $\wp \in U$ und $x \in \mathcal{X}$;*

3) *es gibt ein $g \in \mathcal{L}^1(\mathcal{X}; \mu)$ mit $|\partial_{\wp_j} f(\wp, x)| \leq g(x)$ fuer alle $\wp \in U$, $x \in \mathcal{X}$.*

Dann gilt fuer $F : U \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(\wp) := \int_{\mathcal{X}} f(\wp, x) d\mu(x)$, dass $\partial_{\wp_j} F(\wp)$ fuer alle $\wp \in U$ existiert, und

$$\partial_{\wp_j} F(\wp) = \int_{\mathcal{X}} \partial_{\wp_j} f(\wp, x) d\mu(x).$$

Beweis. Sei $\wp \in U$, sei (h_n) eine Folge im $\mathbb{R}$ mit $h_n \to 0$ und $h_n \neq 0$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$Q_n(x) = \frac{f(\wp + h_n e_j, x) - f(\wp, x)}{h_n},$$

wobei e_j der j-te Einheitsvektor ist. Dann gilt (fuer geeignetes $\xi_n(x)$ mit $|\xi_n(x)| \leq h_n$)

$$\begin{aligned} |Q_n(x)| &= \left| \frac{\partial_{\wp_j} f(\wp + \xi_n(x) e_j, x) h_n}{h_n} \right| \\ &\leq g(x) \end{aligned}$$

fuer alle $x \in \mathcal{X}$ und $n \in \mathbb{N}$, und

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(x) = \partial_{\wp_j} f(\wp, x).$$

Also folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{X}} \partial_{\wp_j} f(\wp, x) d\mu(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{X}} Q_n(x) d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n}\Big(\int_{\mathcal{X}} f(\wp + h_n e_j, x) d\mu(x) - \int_{\mathcal{X}} f(\wp, x) d\mu(x)\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n}\Big(F(\wp + h_n e_j) - F(\wp, x)\Big) \\
&= \partial_{\wp_j} F(\wp),
\end{aligned}$$

da (h_n) beliebig ist.

$\square$

Kapitel 6

Integration im $\mathbb{R}^n$

6.1 Integration im $\mathbb{R}^n$

Wir wollen im folgenden uns auf die Integration im $\mathbb{R}^n$ spezialisieren und die dort gueltigen Verhaeltnisse untersuchen. Es gilt zunaechst die sehr beruhigende Aussage (wir haben bei unserer Konstruktion eigentlich nichts "verloren"!).

6.1.1 Vergleich mit dem Riemann-Integral

Satz 6.1.1 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ messbar. Dann gilt: Ist f Riemann-integrierbar, so ist $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$ (bzw. $f \in L^1([a, b])$) und*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

Beweis. Sei $(I_{n_k})_{1 \leq k \leq 2^n}$ die aequidistante Zerlegung von $[a, b]$ in 2^n Intervalle der Laenge $2^{-n}(b - a)$, und seien

$$\begin{aligned} u_n &:= \sum_{k=1}^{2^n} \Big(\sup_{x \in I_{n_k}} f(x) \Big) \chi_{I_{n_k}}, \\ v_n &:= \sum_{k=1}^{2^n} \Big(\inf_{x \in I_{n_k}} f(x) \Big) \chi_{I_{n_k}}. \end{aligned}$$

Dann ist $u_n \geq u_{n+1}$, $v_n \leq v_{n+1}$ und $v_n \leq f \leq u_n$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$g := \lim_{n \to \infty} (u_n - v_n),$$

der Grenzwert existiert ueberall in $[a, b]$, da die Folgen $(u_n(x))$ und $(v_n(x))$ fuer jedes $x \in [a, b]$ konvergieren. Dann ist $g \geq 0$. Fuer u_n und v_n stimmen

Riemann- und Lebesgue-Integral ueberein, d.h.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{[a,b]} g d\lambda \\ &\stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \int_{[a,b]} (u_n - v_n) d\lambda \\ &= \liminf_{n\to\infty} \Big(\int_a^b v_n dx - \int_a^b u_n dx \Big) \\ &= 0, \end{aligned}$$

da f Riemann-integrierbar ist. Also ist $g = 0$ λ-fast ueberall in $[a, b]$. Daher ist

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} u_n &= f \\ &= \lim_{n\to\infty} v_n \end{aligned}$$

λ-fast ueberall. Da fuer jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|v_n| \leq \max\{|u_0|, |v_0|\} \in \mathcal{L}^1([a, b]),$$

folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f d\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} v_n d\lambda \\ &= \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

$\square$

Wir schreiben in Zukunft auch fuer das Lebesgue-Integral "$\int_a^b f(x)dx$" statt "$\int_{[a,b]} f d\lambda$". Es ist ausserdem

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_{[a,b)} f d\lambda = \int_{(a,b)} f d\lambda = \int_{(a,b]} f d\lambda,$$

da $\lambda(\{a\}) = \lambda(\{b\}) = 0$.

6.1.2 Uneigentliche Riemann-Integrale

Satz 6.1.2 *Sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ($a = -\infty$, $b = \infty$ moeglich), $f : (a, b) \to [-\infty, \infty]$ messbar. Dann gilt*

$$f \in \mathcal{L}^1([a, b]) \;\;\Leftrightarrow\;\; \sup_{s<b} \int_a^s |f(x)| dx < \infty \;\;\Leftrightarrow\;\; \sup_{s>a} \int_s^b |f(x)| dx < \infty.$$

In diesem Fall ist

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \lim_{s\nearrow b}\int_a^s f(x)dx \;=\; \lim_{s\searrow a}\int_s^b f(x)dx.$$

Beweis. Uebungsaufgabe!

□

Es gilt i.a.

$$\sup_{s<b}\int_a^s f(x)dx < +\infty \quad \not\Leftrightarrow \quad f \in \mathcal{L}^1([a,b]).$$

Dies liegt daran, dass uneigentlich Riemann-integrierbare Funktionen nicht notwendig Lebesgue-integrierbar sein muessen! Beispiel hierfuer:

$$f(x) := \frac{\sin x}{x},$$

$(a,b) = (0,\infty)$. Dann existiert

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^s \frac{\sin x}{x}\,dx$$

und ist endlich (Uebungsaufgabe!), aber $f \notin L^1(0,\infty)$. Denn waere f in $L^1(0,\infty)$, so folgte

$$\begin{aligned}
\infty &> \int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx \\
&\geq \int_0^\infty \frac{(\sin x)^+}{x}\,dx \\
&\geq \sum_{n=0}^\infty \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \\
&\geq \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)\pi}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin x\,dx \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)\pi} \\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

im Widerspruch.

6.1.3 Beispiel

Sei $f(x) = x^p$, $p < 0$.

Fall 1 $(a,b)=(0,1)$. Dann haben wir:

$$
\begin{array}{lll}
p>-1 \;\Rightarrow & \displaystyle\int_s^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}(1-s^{p+1}) \le \frac{1}{p+1} & \Rightarrow\; f\in\mathcal{L}^1(0,1).\\
p=-1 \;\Rightarrow & \displaystyle\int_s^1 x^p dx = -\log s \overset{s\searrow 0}{\to} +\infty & \Rightarrow\; f\notin\mathcal{L}^1(0,1).\\
p<-1 \;\Rightarrow & \displaystyle\int_s^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}(1-s^{p+1}) \overset{s\searrow 0}{\to} +\infty & \Rightarrow\; f\notin\mathcal{L}^1(0,1).
\end{array}
$$

Fall 2 $(a,b)=(1,\infty)$. Wird analog behandelt!

6.2 Prinzip von Cavalieri

Im folgenden schreiben wir fuer das Lebesgue-Mass auf dem $\mathbb{R}^n$ praeziser λ^n. "Messbarkeit" bedeutet immer Borel-Messbarkeit.

6.2.1 Prinzip von Cavalieri

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist die Herleitung des "Prinzips von Cavalieri" und des "Satzes von Fubini", die von besonderer Bedeutung fuer die Berechnung von Volumen und allgemeinen Integralen im $\mathbb{R}^n$ sind. Zur Motivation des Cavalieri'schen Prinzips sei

$$
\begin{array}{lllll}
Q & := & [a_1,b_1]\times[a_2,b_2] & \subset & \mathbb{R}^2,\\
Q_x & := & \{y\in\mathbb{R} : (x,y)\in Q\}, & & x\in\mathbb{R},
\end{array}
$$

siehe Fig. 6.1. Dann ist

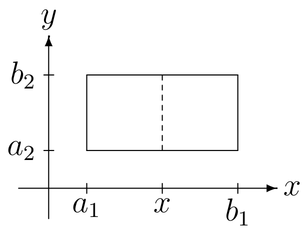


Fig. 6.1: Prinzip von Cavalieri

$$
\lambda^1(Q_x) = \begin{cases} b_2-a_2, & \text{falls} \quad x\in[a_1,b_1],\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}
$$

Wir definieren $s_Q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch $s_Q(x)=\lambda^1(Q_x)$ fuer $x\in\mathbb{R}$. Dann gilt offenbar

$$
\lambda^2(Q) \;=\; (b_1-a_1)(b_2-a_2)
$$

$$
\begin{aligned}
&= (b_2 - a_2) \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a_1,b_1]} d\lambda^1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} s_Q d\lambda^1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(Q_x) d\lambda^1(x),
\end{aligned}
$$

in $d\lambda^1(x)$ wird x der Deutlichkeit halber dazugesetzt!

Der Flaecheninhalt von Q ergibt sich also durch Integration der Laenge der senkrechten Schnitte Q_x ueber x. Dies soll allgemein gelten,

$$\lambda^2(Q) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(Q_x) d\lambda^1(x)$$

siehe Fig. 6.2.

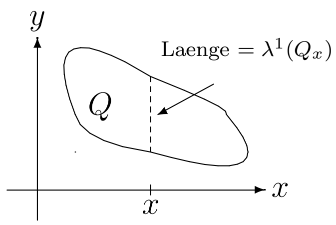


Fig. 6.2: Allgemeine Situation

Definition 6.2.1 *Sei $Q \in \mathbb{R}^n$. Wir zerlegen $\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m$ und definieren fuer $x \in \mathbb{R}^\ell$*

$$Q_x := \{y \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in Q\}.$$

Satz 6.2.1 (Prinzip von Cavalieri) *Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $n = \ell + m$. Dann gilt:*

1) *Q_x ist messbar fuer jedes $x \in \mathbb{R}^\ell$.*

2) *$s_Q : \mathbb{R}^\ell \to [0, \infty]$, gegeben durch $s_Q(x) := \lambda^m(Q_x)$, ist messbar.*

3) $\lambda^n(Q) = \int_{\mathbb{R}^\ell} s_Q d\lambda^\ell = \int_{\mathbb{R}^\ell} \lambda^m(Q_x) d\lambda^\ell(x).$

Beweis.

1) Sei $x \in \mathbb{R}^\ell$. Wir setzen $\mathcal{A}_x := \{A \subset \mathbb{R}^n : A_x \text{ ist messbar im } \mathbb{R}^m\}$. Dann gilt:

$\mathcal{I}^n \subset \mathcal{A}_x$, da $I \in \mathcal{I}^n \Rightarrow I_x \in \mathcal{I}^m$.

$\mathcal{A}_x$ ist eine σ-Algebra, da

1)

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n_x &= \mathbb{R}^m \\ &\in \sigma(\mathcal{I}^m); \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^n \setminus A)_x &= \{y \in \mathbb{R}^m : (x,y) \notin A\} \\ &= \mathbb{R}^m \setminus A_x \\ &\in \sigma(\mathcal{I}^m); \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)_x &= \Big\{y \in \mathbb{R}^m : (x,y) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{y \in \mathbb{R}^m : (x,y) \in A_n\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n)_x \\ &\in \sigma(\mathcal{I}^m). \end{aligned}$$

Es folgt $\mathcal{I}^n \subset \sigma(\mathcal{I}^n) \subset \mathcal{A}_x$. Ist also Q messbar, dann gilt $Q \in \mathcal{A}_x$, also Q_x messbar.

2) Sei μ_k die Reduktion von λ^m auf die Kugel um Null vom Radius k, d.h. $\mu_k(A) = \lambda^m(A \cap \{y \in \mathbb{R}^m : \|y\|_2 \leq k\})$ fuer messbare $A \subset \mathbb{R}^m$. Wegen

$$s_Q(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \mu_k(Q_x)$$

genuegt es also zu zeigen, dass die Abbildung $f_Q : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f_Q(x) := \mu(Q_x)$, messbar ist, falls μ ein endliches Mass auf der Borelalgebra ist. Wir setzen

$$\mathcal{D} := \{A : A \subset \mathbb{R}^n,\ A \text{ messbar},\ f_A : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R} \text{ messbar}\}.$$

$\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System:

1) $A = \mathbb{R}^n \in \mathcal{D}$ und

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{R}^n}(x) &= \mu(\mathbb{R}^n_x) \\ &= \mu(\mathbb{R}^m) \end{aligned}$$

ist konstant, also messbar.

2) Ist $A \in \mathcal{D}$, so ist $\mathbb{R}^n \setminus A$ messbar, also $f_{\mathbb{R}^n \setminus A}(x) = \mu(\mathbb{R}^m) - f_A(x)$, also ist $f_{\mathbb{R}^n \setminus A}$ messbar, daher $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{D}$.

3) Ist (A_n) eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{D}$ und $A = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, dann ist A messbar, und

$$\begin{aligned} f_A(x) &= \mu(A_x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu((A_n)_x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{A_n}(x), \end{aligned}$$

daher $A \in \mathcal{D}$.

Es gilt $\mathcal{I}^n \subset \mathcal{D}$. Denn sei $I \in \mathcal{I}^n$. Dann ist $I = I_1 \times I_2$ mit $I_1 \subset \mathbb{R}^\ell$, $I_2 \subset \mathbb{R}^m$, und $\mu(I_x) = \mu(I_2)\,\chi_{I_1}(x)$, also ist f_I messbar.

$\mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{I}^n)$ ist nach der Definition von $\mathcal{D}$. Also gilt $\mathcal{I}^n \subset \mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{I}^n)$, und Satz 2.2.3 liefert $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{I}^n)$. Ist also Q messbar, so ist $Q \in \mathcal{D}$, daher ist f_Q messbar.

3) Fuer messbares $Q \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\mu(Q) := \int_{\mathbb{R}^\ell} \lambda^m(Q_x) d\lambda^\ell(x).$$

Wegen des Eindeitigkeitssatzes 2.3.2 genuegt es zu zeigen, dass μ ein Mass ist und $\mu(I) = \lambda^n(I)$ fuer alle Intervalle $I \in \mathcal{I}^n$.

μ ist ein Mass. Denn $\mu(I) = \lambda^n(I)$, da $\emptyset_x = \emptyset$. Sind Q_n disjunkt und messbar, so sind $(Q_n)_x$ disjunkt fuer alle x, daher

$$\begin{aligned} \mu\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n\Big) &= \int_{\mathbb{R}^\ell} \lambda^m\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (Q_n)_x\Big) d\lambda^\ell(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^m\left((Q_n)_x\right) d\lambda^\ell(x) \\ &\overset{\text{Folgerung 4.1.1}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^\ell} \lambda^m\left((Q_n)_x\right) d\lambda^\ell(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n). \end{aligned}$$

Sei $I = [a,b) \in \mathcal{I}^n$ und $I = I_1 \times I_2$ mit $I_1 \in \mathcal{I}^\ell$, $I_2 \in \mathcal{I}^m$. Dann ist

$$\lambda^n(I) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$$

$$\begin{aligned} &= \prod_{j=1}^{\ell}(b_j - a_j) \prod_{j=\ell+1}^{n}(b_j - a_j) \\ &= \lambda^\ell(I_1)\,\lambda^m(I_2), \end{aligned}$$

und ferner

$$\begin{aligned} \mu(I) &= \int_{\mathbb{R}^\ell} \lambda^m(I_x)d\lambda^\ell(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^\ell} \lambda^m(I_2)\chi_{I_1}(x)d\lambda^\ell(x) \\ &= \lambda^m(I_2)\,\lambda^\ell(I_1), \end{aligned}$$

also $\lambda^n(I) = \mu(I)$.

□

Folgerung 6.2.1 *Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $n = \ell + m$. Dann gilt:*

1) *Ist $Q = Q_1 \times Q_2$, wobei $Q_1 \subset \mathbb{R}^\ell$ und $Q_2 \subset \mathbb{R}^m$ messbar sind, so ist $\lambda^n(Q) = \lambda^\ell(Q_1) \times \lambda^m(Q_2)$.*

2) *Mit $Q^y := \{x \in \mathbb{R}^\ell : (x, y) \in Q\}$ gelten 1), 2) von Satz 6.2.1 analog, sowie*
$$\lambda^n(Q) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^\ell(Q^y)d\lambda^m(y).$$

Beweis.
1) folgt aus Satz 6.2.1, 3), da $\lambda^m(Q_x) = \lambda^m(Q_2)\,\chi_{Q_1}(x)$.

2) Die Transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, gegeben durch $T(x, y) = (y, x)$, ist orthogonal. Es gilt:

$$\begin{aligned} \lambda^n(Q) &\overset{\text{Satz 2.5.2}}{=} \lambda^n(TQ) \\ &\overset{\text{Satz 6.2.1}}{=} \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^\ell((TQ)_y)d\lambda^m(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^\ell(Q^y)d\lambda^m(y). \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe von Satz 6.2.1 und Folgerung 6.2.1 sind wir nun in der Lage, in vielen Faellen sehr einfach das Volumen von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ zu berechnen.

6.2.2 Volumenberechnungen mit dem Cavalieri-Prinzip

Zylinder Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ messbar, $h \geq 0$ und $Z := \mathcal{X} \times [0,h] \subset \mathbb{R}^n$. Nach Folgerung 6.2.1 gilt

$$\begin{aligned}\lambda^n(Z) &= \lambda^{n-1}(\mathcal{X})\,\lambda^1([0,h]) \\ &= h \cdot \lambda^{n-1}(\mathcal{X}).\end{aligned}$$

Parallelotop Sei

$$P = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} c_j v_j : 0 \leq c_1, \ldots, c_n \leq 1 \Big\},$$

wobei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist. Es ist

$$P = T([0,1]^n),$$

wobei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung ist, definiert durch $T(e_j) = v_j$, e_j ist j-ter Einheitsvektor. Ferner gilt

$$\begin{aligned}1 &= \lambda^n([0,1]^n) \\ &= \lambda^n(T^{-1}P) \\ &= T(\lambda^n)(P) \\ &\overset{\text{Satz 2.5.4}}{=} \frac{1}{|\det T|}\,\lambda^n(P),\end{aligned}$$

also ist $\lambda^n(P) = |\det T| = |\det A|$, wobei A die $(n \times n)$-Matrix mit den Spalten $v_1, \ldots, v_n$ ist.

Homothetie Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $r > 0$. Gesucht $\lambda^n(r\mathcal{X})$. Mit $T(x) = rx$ gilt $r\mathcal{X} = T(\mathcal{X})$, also

$$\begin{aligned}\lambda^n(r\mathcal{X}) &\overset{\text{Satz 2.5.4}}{=} |\det T|\, T(\lambda^n)(r\mathcal{X}) \\ &= |\det T|\,\lambda^n(\mathcal{X}) \\ &= r^n\,\lambda^n(\mathcal{X}).\end{aligned}$$

Kegel Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ messbar und $h \geq 0$. Die Menge

$$\mathcal{C} := \{((1-t)x, th) : x \in \mathcal{X},\ 0 \leq t \leq 1\}$$

ist der Kegel mit Basis $\mathcal{X}$ und der Hoehe h (Spitze ist $(0, \ldots, 0, h)$). Es ist

$$\lambda^n(\mathcal{C}) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{n-1}(C^t)\,d\lambda^1(t)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{[0,h]} \lambda^{n-1}\Big(\Big(1-\frac{t}{h}\Big)\mathcal{X}\Big)dt \\
&\overset{\text{Homothetie}}{=} \int_{[0,h]} \Big(1-\frac{t}{h}\Big)^{n-1} \lambda^{n-1}(\mathcal{X})dt \\
&= -\frac{h}{n}\Big(1-\frac{t}{h}\Big)^{n}\Big|_0^h \lambda^{n-1}(\mathcal{X}) \\
&= \frac{h}{n}\lambda^{n-1}(\mathcal{X}).
\end{aligned}
$$

Flaeche zwischen 2 Kurven Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ messbar, $f \le g$ und $Q := \{(x,y) : x \in [a,b],\ f(x) \le y \le g(x)\}$. Es ist

$$
\begin{aligned}
\lambda^2(Q) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^1(Q_x) d\lambda^1(x) \\
&= \int_{[a,b]} \lambda^1([f(x), g(x)])dx \\
&= \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx.
\end{aligned}
$$

Rotationskoerper Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ messbar, $f \ge 0$ und

$$Q := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a,b],\ y^2 + z^2 \le f(x)\}.$$

Dann ist Q_x der Kreis um Null vom Radius $f(x)$, also

$$
\begin{aligned}
\lambda^3(Q) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^2(Q_x) d\lambda^1(x) \\
&= \int_a^b \pi\,(f(x))^2\, dx \\
&= \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx.
\end{aligned}
$$

Kugel Sei $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$ die Kugel um Null mit Radius $R > 0$. Das ist ein Rotationskoerper mit $[a,b] = [-R,R]$ und $f(x) := \sqrt{R^2 - x^2}$. Also ist

$$
\begin{aligned}
\lambda^3(K) &= \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx \\
&= \frac{4}{3}\pi R^3.
\end{aligned}
$$

Simplex Seien $v_0, v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{S} := \Big\{ \sum_{j=0}^{n} c_j v_j \,:\, c_j \geq 0,\, \sum_{j=0}^{n} c_j = 1 \Big\}.$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{S}_n$ das Simplex mit $v_0 = 0$ und $v_j = e_j$, also

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n &= \Big\{ (c_1, \ldots, c_n) \,:\, c_j \geq 0,\, \sum_{j=1}^{n} c_j \leq 1 \Big\} \\ &\overset{t=1-c_n}{=} \Big\{ ((1-t)x, t) \,:\, x_j \geq 0,\, \sum_{j=1}^{n-1} x_j \leq 1,\, t \in [0,1] \Big\}, \end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{S}_n$ ist der Kegel mit Basis $\mathcal{S}_{n-1}$ und Hoehe 1, also

$$\lambda^n(\mathcal{S}_n) = \frac{1}{n}\, \lambda^{n-1}(\mathcal{S}_{n-1}).$$

Da $\mathcal{S}_1 = [0,1]$ ist, ergibt sich

$$\lambda^n(\mathcal{S}_n) = \frac{1}{n!}.$$

Weiter gilt $\mathcal{S} = T(\mathcal{S}_n)$ mit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, gegeben durch $T(x) = Ax + v_0$, hierbei hat A Spalten $v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0$. Also ist

$$\begin{aligned} \lambda^n(\mathcal{S}) &= |\det A|\, \lambda^n(\mathcal{S}_n) \\ &= \frac{1}{n!}\, |\det A| \end{aligned}$$

(folgt aus Satz 2.5.4, falls $\det A \neq 0$; falls $\det A = 0$, liegt $\mathcal{S}$ in einer Hyperebene, also ist $\lambda^n(\mathcal{S}) = 0$).

Kapitel 7

Satz von Fubini

7.1 Satz von Fubini

Das Cavalieri'sche Prinzip liefert uns die Moeglichkeit, Volumen im $\mathbb{R}^n$ auf solche im $\mathbb{R}^1$ zurueckzufuehren, oder, aequivalent dazu, das Integral der charakteristischen Funktion im $\mathbb{R}^n$ auf solche im $\mathbb{R}^1$. Dieses "Prinzip" soll jetzt auf allgemeine Funktionen verallgemeinert werden.

7.1.1 Der Satz von Tonelli

Satz 7.1.1 (Tonelli) *Sei $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ messbar und $n = \ell + m$ mit $\ell, m \in \mathbb{N}$. Fuer $x \in \mathbb{R}^\ell$ definieren wir $f_x : \mathbb{R}^m \to [0, \infty]$ durch $f_x(y) := f(x, y)$. Dann gilt:*

1) *f_x ist messbar (bzgl. $\sigma(\mathcal{I}^m)$).*

2) *Die Funktion $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} f_x(y) d\lambda^m(y)$ ist messbar (bzgl. $\sigma(\mathcal{I}^\ell)$).*

3) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^\ell} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f_x(y) d\lambda^m(y) \Big) d\lambda^\ell(x).$

Proof.

I Zuerst betrachte den Spezialfall $f = \chi_Q$, fuer messbares $Q \subset \mathbb{R}^n$, d.h. $f_x(y) = \chi_{Q_x}(y)$. Dann folgen alle Behauptungen aus dem Prinzip von Cavalieri, da

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{Q_x}(y) d\lambda^m(y) &= \lambda^m(Q_x), \\ \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Q d\lambda^n &= \lambda^n(Q). \end{aligned}$$

II Sei nun f eine Treppenfunktion, d.h.

$$f = \sum_{i=1}^{N} c_i \, \chi_{Q_i},$$

mit $c_i \geq 0$ und paarweise disjunkten messbaren Mengen Q_i. Dann gilt

$$f_x(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i \, \chi_{(Q_i)_x}(y).$$

Nach **I** und Satz 3.1.5 ist f_x $\sigma(\mathcal{I}^m)$-messbar, und

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_x(y) d\lambda^m(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{(Q_i)_x}(y) d\lambda^m(y)$$

ist $\sigma(\mathcal{I}^\ell)$-messbar. Schliesslich ist

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n &= \sum_{i=1}^{N} c_i \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{Q_i} d\lambda^n \\
&\overset{\mathbf{I}}{=} \sum_{i=1}^{N} c_i \int_{\mathbb{R}^\ell} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_{(Q_i)_x} d\lambda^m \Big) d\lambda^\ell \\
&= \int_{\mathbb{R}^\ell} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{N} c_i \, \chi_{(Q_i)_x} d\lambda^m \Big) d\lambda^\ell \\
&= \int_{\mathbb{R}^\ell} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f_x(y) d\lambda^m(y) \Big) d\lambda^\ell,
\end{aligned}$$

d.h. 1), 2), 3) gelten fuer diesen Fall.

III Allgemeiner Fall: Sei $f \geq 0$ messbar. Nach Satz 3.2.2 gilt

$$f = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k$$

mit geeigneten Treppenfunktionen f_k, fuer die $0 \leq f_k \leq f_{k+1}$ fuer alle k gilt. Dann ist

$$f_x = \sup_{k \in \mathbb{N}} (f_k)_x$$

($\Rightarrow$ 1)!), und

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_x(y) d\lambda^m(y) \overset{\text{Beppo Levi}}{=} \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^m} (f_k)_x(y) d\lambda^m(y)$$

($\Rightarrow$ 2)!), also

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n &\overset{\text{Beppo Levi}}{=} \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} f_k d\lambda^n \\
&= \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^\ell} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} (f_k)_x d\lambda^m \Big) d\lambda^\ell \\
&\overset{\text{Beppo Levi}}{=} \int_{\mathbb{R}^\ell} \sup_{k\in\mathbb{N}} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} (f_k)_x d\lambda^m \Big) d\lambda^\ell \\
&= \int_{\mathbb{R}^\ell} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f_x d\lambda^m \Big) d\lambda^\ell.
\end{aligned}$$

□

Genauso zeigt man (mit Folgerung 6.2.1 statt Satz 6.2.1), dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^\ell} f(x,y) d\lambda^\ell(x) \Big) d\lambda^m(y).$$

7.1.2 Satz von Fubini

Folgerung 7.1.1 (Satz von Fubini) *Sei* $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ *messbar,* $n = \ell + m$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned}
f \in L^1(\mathbb{R}^n) &\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^\ell} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)| d\lambda^m(y) \Big) d\lambda^\ell(x) < \infty \\
&\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^\ell} |f(x,y)| d\lambda^\ell(x) \Big) d\lambda^m(y) < \infty.
\end{aligned}$$

Falls $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *so ist*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)| d\lambda^m(y) < \infty \qquad &\textit{fuer fast alle } x \in \mathbb{R}^\ell, \\
\int_{\mathbb{R}^\ell} |f(x,y)| d\lambda^\ell(x) < \infty \qquad &\textit{fuer fast alle } y \in \mathbb{R}^m,
\end{aligned}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^\ell} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) d\lambda^m(y) \Big) d\lambda^\ell(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^\ell} f(x,y) d\lambda^\ell(x) \Big) d\lambda^m(y).$$

Beweis. Aus dem Satz von Tonelli folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f| d\lambda^n &= \int_{\mathbb{R}^\ell} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)| d\lambda^m(y) \Big) d\lambda^\ell(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^\ell} |f(x,y)| d\lambda^\ell(x) \Big) d\lambda^m(y)
\end{aligned}$$

und $\int_{\mathbb{R}^n} |f| d\lambda^n$ ist unabhaengig von der Wahl des Repraesentanten von f in $\mathcal{L}^1$. Also gelten die "$\Leftrightarrow$". Ist $\int_{\mathbb{R}^n} |f| d\lambda^n < \infty$, so hat $\Big\{x : \int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)| d\lambda^m(y) = \infty\Big\}$ das λ^ℓ-Mass 0 und $\Big\{y : \int_{\mathbb{R}^\ell} |f(x,y)| d\lambda^\ell(x) = \infty\Big\}$ das λ^m-Mass 0. Die letzte Behauptung folgt aus dem Satz von Tonelli, angewandt auf die Teile f^+ und f^-.

$\square$

Folgerung 7.1.2 *Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}} \Big(\dots \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \Big) \dots \Big) dx_n,$$

und die Reihenfolge der Integrationen darf beliebig vertauscht werden!

Die fuer praktische Integrationen zentrale Bedeutung des Satzes von Fubini soll nunmehr anhand einiger Beispiele demonstriert werden.

7.1.3 Integration ueber Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $f \in L^1(Q)$, so koennen wir $f = 0$ ausserhalb Q setzen und erhalten

$$\begin{aligned} \int_Q f d\lambda^n &= \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_Q f) d\lambda^n \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} (\chi_Q f)(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Beispiel 7.1.1 Sei $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ ein Quader im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\int_Q f d\lambda^n = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n.$$

Allgemeiner: Ist $Q = Q_1 \times Q_2$ mit kompakten $Q_1 \subset \mathbb{R}^\ell$ und $Q_2 \subset \mathbb{R}^m$, so gilt

$$\int_Q f d\lambda^n = \int_{Q_1} \Big(\int_{Q_2} f(x,y)\, d\lambda^m(y) \Big) d\lambda^\ell(x),$$

vgl. mit dem Satz von Tonelli.

7.1.4 Beispiele

I Sei $f(x,y) = xy^2$ und $Q = [1,2] \times [1,3] \subset \mathbb{R}^2$. Dann

$$\begin{aligned}
\int_Q f d\lambda^2 &= \int_1^2 \Big(\int_1^3 xy^2 dy\Big) dx \\
&= \int_1^2 \frac{1}{3} xy^3 \,|_{y=1}^{y=3}\, dx \\
&= \int_1^2 \frac{26}{3} x\, dx \\
&= \frac{13}{3} x^2 \,|_1^2 \\
&= 13.
\end{aligned}$$

II Sei $f(x_1, \ldots, x_n) = \exp(x_1 + \ldots + x_n)$ und $Q = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$. Fuer $n = 2$ ist

$$\begin{aligned}
\int_Q f d\lambda^2 &= \int_0^1 \int_0^1 e^{x_1 + x_2} dx_1 dx_2 \\
&= \int_0^1 \int_0^1 e^{x_1} e^{x_2}\, dx_1 dx_2 \\
&= \int_0^1 e^{x_2} \Big(\int_0^1 e^{x_1} dx_1\Big) dx_2 \\
&= \int_0^1 e^{x_1} dx_1 \cdot \int_0^1 e^{x_2} dx_2 \\
&= (e-1)^2.
\end{aligned}$$

Ebenso fuer n beliebig (per Induktion)

$$\begin{aligned}
\int_Q f d\lambda^n &= \int_0^1 \ldots \int_0^1 \exp\Big(\sum_{j=1}^n x_j\Big) dx_1 \ldots dx_n \\
&= \int_0^1 \ldots \int_0^1 \prod_{j=1}^n e^{x_j}\, dx_1 \ldots dx_n \\
&= \prod_{j=1}^n \int_0^1 e^t\, dt \\
&= (e-1)^n.
\end{aligned}$$

III Sei $f \in L^1(Q)$ mit

$$Q := \{(x,y,z) :\, x \in [a,b],\ f_1(x) \le y \le g_1(x),\ f_2(x,y) \le z \le g_2(x,y)\},$$

wobei f_1, g_1 und f_2, g_2 stetige Funktionen sind. Dann gilt

$$\int_Q f d\lambda^3 = \int_a^b \Big(\int_{f_1(x)}^{g_1(x)} \Big(\int_{f_2(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz \Big) dy \Big) dx.$$

(Mit Hilfe dieser Formel lassen sich haeufig bequem Volumina ($f \equiv 1$) und Massen ($f =$ Dichte) von Koerpern im $\mathbb{R}^3$ berechnen.)

Zum Beweis: Da f_1, g_1 und f_2, g_2 stetig sind, ist Q kompakt, also messbar. Die Behauptung folgt aus dem Satz von Fubini.

7.1.5 Allgemeiner Satz von Fubini

Die Saetze von Tonelli und Fubini gelten viel allgemeiner. Dazu sind die Begriffe des "Produktmasses" zweier Masse und "Produkt- σ-Algebra" zweier σ-Algebren zu definieren, was hier nicht geschehen soll. Hierzu sei auf [Bau78, S. 100-101] verwiesen. Man erhaelt dann:

Satz 7.1.2 *Seien $(\mathcal{X}_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, Massraeume, $f : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \to [0, \infty]$ sei $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-messbar. Dann gilt:*

1)

$$\begin{aligned} x &\mapsto \int_{\mathcal{X}_2} f_x(y) d\mu_2(y) \quad \textit{ist } \mathcal{A}_1\textit{-messbar}, \\ y &\mapsto \int_{\mathcal{X}_1} f_y(x) d\mu_1(x) \quad \textit{ist } \mathcal{A}_2\textit{-messbar}. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2} f d\, \mu_1 \otimes \mu_2 &= \int_{\mathcal{X}_1} \Big(\int_{\mathcal{X}_2} f_x(y) d\mu_2(y) \Big) d\mu_1(x) \\ &= \int_{\mathcal{X}_2} \Big(\int_{\mathcal{X}_1} f_y(x) d\mu_1(x) \Big) d\mu_2(y). \end{aligned}$$

Ist $f : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \to [-\infty, \infty]$ $(\mu_1 \otimes \mu_2)$-integrierbar ueber $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, so gelten:

3)

f_x ist fuer μ_1-fast alle $x \in \mathcal{X}_1$ μ_2-integrierbar ueber $\mathcal{X}_2$,
f_y ist fuer μ_2-fast alle $y \in \mathcal{X}_2$ μ_1-integrierbar ueber $\mathcal{X}_1$.

4)

$$\begin{aligned} x &\mapsto \int_{\mathcal{X}_2} f_x(y) d\mu_2(y) \qquad \textit{ist } \mu_1\textit{-integrierbar ueber } \mathcal{X}_1, \\ y &\mapsto \int_{\mathcal{X}_1} f_y(x) d\mu_1(x) \qquad \textit{ist } \mu_2\textit{-integrierbar ueber } \mathcal{X}_2. \end{aligned}$$

5) *Es gilt die Identitaet* 2).

7.2 Nullmengen im $\mathbb{R}^n$

Wir zeigen nunmehr noch einige Aussagen ueber Nullmengen im $\mathbb{R}^n$.

7.2.1 Hyperebene

Satz 7.2.1 *Jede Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$ ist λ^n -Nullmenge.*

Beweis. Sei $H = \{x \in \mathbb{R}^n : (v,x) = c\}$ fuer ein $v \in \mathbb{R}^n$ und ein $c \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. sei $v = e_n$ und $c = 0$, also $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Dann gilt

$$H = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$$

mit den kompakten (also messbaren) Mengen $H_k := \{x \in H : k-1 \le \|x\|_2 \le k\}$. Wir zeigen, dass $\lambda^n(H_k) = 0$ fuer alle $k \in \mathbb{N}$ gilt (Satz 4.3.1 $\Rightarrow \lambda^n(H) = 0$). Fubini liefert

$$\begin{aligned} \lambda^n(H_k) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \chi_{H_k}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \Big) dx_{n-1} \ldots dx_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\square$

7.2.2 Graphen stetiger Funktionen

Satz 7.2.2 *Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt und $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist*

$$\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : x \in \mathcal{X},\ y = f(x)\}$$

λ^n -Nullmenge.

Beweis. Da f stetig ist, ist Γ_f kompakt, also $\chi_{\Gamma_f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und

$$\chi_{\Gamma_f}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \ x \notin \mathcal{X}, \\ 0, & \text{falls } \ x \in \mathcal{X} \text{ und } y \neq f(x), \\ 1, & \text{falls } \ x \in \mathcal{X} \text{ und } y = f(x). \end{cases}$$

Fuer jedes feste $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ gilt also $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \chi_{\Gamma_f}(x,y)dy = 0$. Nach dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} \lambda^n(\Gamma_f) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \chi_{\Gamma_f}(x,y)\, dy \Big) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\square$

7.2.3 Satz von Sard

Lemma 7.2.1 *Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gibt es abzaehlbar viele Quader $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$, deren Inneres punktfremd ist, mit $\mathcal{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$.*

Beweis. Betrachte fuer $k \in \mathbb{Z}$ die Menge $\mathcal{W}_k$ aller Wuerfel der Form

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : z_j 2^{-k} \leq x_j \leq (z_j + 1)2^{-k},\ 1 \leq j \leq n\}$$

mit $z_j \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\mathcal{W}_k$ abzaehlbar, also auch

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{W}_k.$$

Ferner gilt: Fuer alle $W_1 \in \mathcal{W}_k$ und $W_2 \in \mathcal{W}_\ell$ mit $k \geq \ell$ ist offenbar entweder $W_1^\circ \cap W_2 = \emptyset$ oder $W_1 \subset W_2$, siehe Fig. 7.1. Wir konstruieren die gesuchte

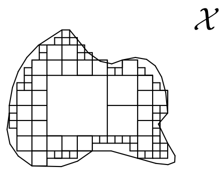


Fig. 7.1: Partition

Menge von Quadern induktiv. Sei $\mathcal{Q}_0$ die Menge aller Wuerfel $W \in \mathcal{W}_0$, die ganz in $\mathcal{X}$ liegen, und $\mathcal{Q}_k$ die Menge aller Wuerfel $W \in \mathcal{W}_k$ mit $W \subset \mathcal{X}$, die in keinem der Wuerfel aus $\mathcal{Q}_0 \cup \ldots \cup \mathcal{Q}_{k-1}$ enthalten sind. Wir setzen dann

$$\mathcal{Q} := \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{Q}_k.$$

Dann ist $\mathcal{Q}$ abzaehlbar, je zwei verschiedene Wuerfel aus $\mathcal{Q}$ haben punktweise fremdes Inneres, und $\mathcal{X}$ ist die Vereinigung aller Wuerfel aus $\mathcal{Q}$.

□

<u>Beachte</u>: Offenbar ist $\mathcal{X}$ auch abzaehlbare Vereinigung von paarweise disjunkten Elementen aus $\mathcal{I}^n$!

Satz 7.2.3 *Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann ist fuer jede Nullmenge $N \subset \mathcal{X}$ auch $F(N)$ eine Nullmenge.*

Beweis. Da sich $\mathcal{X}$ als Vereinigung abzaehlbar vieler kompakter Quader darstellen laesst, genuegt es zu zeigen: Ist $K \subset \mathcal{X}$ kompakter Quader, so ist $F(N \cap K)$ eine λ^n-Nullmenge. Da die partiellen Ableitungen von F auf dem Kompaktum K stetig sind, ist F auf K Lipschitz-stetig, d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$ derart, dass

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq C\, \|x - y\|_\infty$$

fuer alle $x, y \in K$. Ist also W ein Wuerfel der Seitenlaenge $l > 0$, so ist $F(W \cap K)$ enthalten in einem Wuerfel der Seitenlaenge $2Cl > 0$. Es gilt also

$$\begin{aligned} \lambda^n(F(W \cap K)) &\leq (2Cl)^n \\ &= (2C)^n\, \lambda^n(W). \end{aligned}$$

Da N λ^n-Nullmenge ist, existieren nach Uebungsaufgabe zu jedem $\varepsilon > 0$ abzaehlbar viele Wuerfel Q_k, $k \in \mathbb{N}$, mit

$$\begin{aligned} N &\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(Q_k) &< \varepsilon\, (2C)^{-n}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \lambda^n(F(N \cap K)) &\leq \lambda^n\Big(F\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \cap K\Big)\Big) \\ &\leq \lambda^n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} F(Q_k \cap K)\Big) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(F(Q_k \cap K)) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (2C)^n\, \lambda^n(Q_k) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $\lambda^n(F(N \cap K)) = 0$.

$\square$

Kapitel 8

Die Substitutionsregel im $\mathbb{R}^n$

8.1 Die Substitutionsregel im $\mathbb{R}^n$

8.1.1 Allgemeine Regel

Satz 8.1.1 *Sei $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ eine messbare Abbildung ($\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Mengen, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Algebren auf $\mathcal{X}$ bzw. $\mathcal{Y}$). Ist μ ein Mass auf $\mathcal{A}$ und $f : \mathcal{Y} \to [0, \infty]$ messbar, so gilt*

$$\int_{\mathcal{Y}} f dT(\mu) = \int_{\mathcal{X}} f \circ T \, d\mu$$

($T(\mu)$ ist das Bildmass von μ unter T, vgl. Satz 2.4.2).

Beweis. Nach Satz 2.4.3 ist $f \circ T$ messbar, und $f \circ T \geq 0$ (klar).
I Sei $f = \chi_B$ mit $B \in \mathcal{B}$. Dann

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{Y}} \chi_B dT(\mu) &= T(\mu)(B) \\
&\overset{\text{Definition}}{=} \mu(T^{-1}(B)) \\
&= \int_{\mathcal{X}} \chi_{T^{-1}(B)} d\mu \\
&= \int_{\mathcal{X}} \chi_B \circ T \, d\mu,
\end{aligned}$$

da $\chi_{T^{-1}(B)} = \chi_B \circ T$.

II Sei $f = \sum_{i=1}^{N} c_i \, \chi_{B_i}$ mit $B_i \in \mathcal{B}$. Dann gilt

$$\int_{\mathcal{Y}} f dT(\mu) = \sum_{i=1}^{N} c_i \int_{\mathcal{Y}} \chi_{B_i} \, dT(\mu)$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\mathbf{I}}{=} \sum_{i=1}^{N} c_i \int_{\mathcal{Y}} \chi_{B_i} \circ T \, d\mu \\
&= \int_{\mathcal{X}} \sum_{i=1}^{N} c_i \left(\chi_{B_i} \circ T\right) d\mu \\
&= \int_{\mathcal{X}} f \circ T \, d\mu.
\end{aligned}$$

III Sei $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, wobei f_n Treppenfunktionen mit $f_n \geq 0$ und $f_n \leq f_{n+1}$ sind. Dann

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{Y}} f dT(\mu) &\overset{\text{Beppo Levi}}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{Y}} f_n dT(\mu) \\
&\overset{\mathbf{II}}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{X}} f_n \circ T \, d\mu \\
&\overset{\text{Beppo Levi}}{=} \int_{\mathcal{X}} f \circ T \, d\mu.
\end{aligned}$$

□

Folgerung 8.1.1 *Seien T, μ wie im Satz 8.1.1. Dann gilt:*

1) *Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{Y}; T(\mu))$, so ist $f \circ T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{X}; \mu)$.*

2) *Ist T bijektiv, so gilt auch "$\Leftarrow$" in 1).*

In jedem Fall ist

$$\int_{\mathcal{Y}} f dT(\mu) = \int_{\mathcal{X}} f \circ T \, d\mu.$$

Beweis.
1) Anwendung vom Satz 8.1.1 auf f^+ und f^-.
2) Es ist $f \circ T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{X}; \mu) = \mathcal{L}^1(\mathcal{X}; T^{-1}(T(\mu)))$, also nach 1)

$$\begin{aligned}
f &= (f \circ T) \circ T^{-1} \\
&\in \mathcal{L}^1((T^{-1})^{-1}(\mathcal{X}); T(\mu)) \\
&= \mathcal{L}^1(\mathcal{Y}; T(\mu)).
\end{aligned}$$

□

8.1.2 Substitutionsformel fuer affine Transformationen

Satz 8.1.2 *Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $T(x) = Ax + v$, wobei A eine nichtsingulaere $(n \times n)$ -Matrix ist und $v \in \mathbb{R}^n$. Sei $f : T(\mathcal{X}) \to [-\infty, \infty]$ integrierbar. Dann gilt*

$$\int_{\mathcal{X}} f(Ax + v)d\lambda^n(x) = \frac{1}{|\det A|} \int_{T(\mathcal{X})} f d\lambda^n.$$

Beweis. Folgt aus Folgerung 8.1.1, da

$$T(\lambda^n) = \frac{1}{|\det A|}\,\lambda^n,$$

nach Satz 2.5.4.

□

Statt "$d\lambda^n(x)$" schreiben wir auch einfach "dx" im $\mathbb{R}^n$, d.h. fuer $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = x_1 x_2 \sin x_3$, bedeutet

$$\int_{\mathcal{X}} f d\lambda^3, \quad \int_{\mathcal{X}} f(x)dx, \quad \int_{\mathcal{X}} x_1 x_2 \sin x_3 dx$$

dasselbe.

Beispiel 8.1.1 Gesucht ist das Integral $\int_{\mathcal{Y}} x_1 x_2 dx$, siehe Fig. 8.1. Wir set-

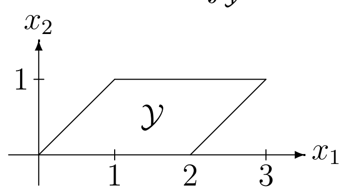


Fig. 8.1: Integrationsgebiet

zen $T(x) = Ax$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und $f(x) = x_1 x_2$, $\mathcal{X} = [0, 1]^2$. Dann ist $f(Ax) = (2x_1 + x_2)x_2$, $T(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$ und $\det A = 2$, also

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{Y}} x_1 x_2 dx &= 2\int_{\mathcal{X}} (2x_1 + x_2)x_2 dx \\
&= 2\int_0^1 \int_0^1 (2x_1 x_2 + x_2^2) dx_1 dx_2 \\
&= 2\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big) \\
&= \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

8.1.3 Diffeomorphismen

Wir wollen die Substitutionsformel auf nichtlineare Transformationen T verallgemeinern.

Definition 8.1.1 *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein $T : U \to V$ heisst C^s-Diffeomorphismus, falls T bijektiv ist und $T \in C^s(U, \mathbb{R}^n)$, $T^{-1} \in C^s(V, \mathbb{R}^n)$ gilt.*

Satz 8.1.3 *Sei $T : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus, wobei $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen sind. Sei $I = [a, b) \in \mathcal{I}^n$ mit $\overline{I} \subset U$. Dann gilt*

$$\lambda^n(T(I)) = \int_I |\det DT(x)|\, dx.$$

Beweis.
I Beweisstruktur: Wir zeigen zuerst

$$\lambda^n(T(I)) \leq \Big(\sup_{x\in I} |\det DT(x)|\Big)\lambda^n(I) \tag{8.1.1}$$

fuer alle $I \in \mathcal{I}^n$, indem wir T durch eine lineare Abbildung approximieren. Indem wir (8.1.1) auf T^{-1} uebertragen, zeigen wir

$$\Big(\inf_{x\in I} |\det DT(x)|\Big)\lambda^n(I) \leq \lambda^n(T(I)).$$

Schliesslich ergibt sich die Behauptung durch Einschachtelung und einen geeigneten Grenzuebergang.

II Sei $I = [a, b) \in \mathcal{I}^n$ und $I \neq \emptyset$. Dann ist $\lambda^n(I) > 0$. Wir definieren $c \geq 0$ durch die Identitaet

$$\lambda^n(T(I)) = c\, \lambda^n(I).$$

Wir zerlegen $I^{(0)} := I$ durch Seitenhalbierung in 2^n Teilintervalle und waehlen $I^{(1)}$ als ein solches Teilintervall mit

$$\lambda^n(T(I^{(1)})) \geq c\, \lambda^n(I^{(1)})$$

(muss es geben, da andernfalls $\lambda^n(T(I)) < c\, \lambda^n(I)$). Auf dieselbe Weise erhalten wir $I^{(2)}$ aus $I^{(1)}$ usw., also eine Folge $I^{(k)}$ in $\mathcal{I}^n$ mit $I^{(k)} \supset I^{(k+1)}$ und

$$\lambda^n(T(I^{(k)})) \geq c\, \lambda^n(I^{(k)}).$$

Es ist

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{I^{(k)}} = \{a\}$$

fuer ein geeignetes $a \in \overline{I}$.

III Wir definieren $\tilde{T} : U \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\tilde{T}(x) = T(a) + DT(a)\,(x-a)$$

(lokale lineare Approximation an T in a). Wir wollen $I^{(k)}$ geringfuegig vergroessern, so dass

$$T(I^{(k)}) \subset \tilde{T}(\text{geringfuegig vergroessertes } I^{(k)}).$$

Zu diesem Zweck definieren wir eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$\|x\| = \max_{1\le j\le n} \frac{2}{b_j - a_j}\,|x_j|.$$

Dadurch erreicht man, dass

$$\begin{aligned} \overline{I^{(k)}} &= K(x^{(k)}, 2^{-k}) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^{(k)}\| \le 2^{-k}\}, \end{aligned}$$

wobei $x^{(k)}$ der Mittelpunkt von $I^{(k)}$ ist. Wir setzen

$$I_\varepsilon^{(k)} = (1+\varepsilon)(I^{(k)} - x^{(k)}) + x^{(k)},$$

also $\overline{I_\varepsilon^{(k)}} = K(x^{(k)}, (1+\varepsilon)2^{-k})$. Wir wollen zeigen, dass $T(I^{(k)}) \subset \tilde{T}(I_\varepsilon^{(k)})$, falls k hinreichend gross ist. Sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen

$$R(h) = T(a+h) - T(a) - DT(a)\,h,$$

also

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|R(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Wir waehlen $\delta > 0$ so, dass $\|DT(a)^{-1}R(h)\| < \dfrac{\varepsilon}{2}\|h\|$, falls $\|h\| < \delta$ (moeglich, da

$$\begin{aligned} \|DT(a)^{-1}R(h)\| &\le \|DT(a)^{-1}\|\|R(h)\| \\ &= \|DT(a)^{-1}\|\frac{\|R(h)\|}{\|h\|}\,\|h\|). \end{aligned}$$

Wir waehlen $k_0 \in \mathbb{N}$ so, dass (beachte $a \in \overline{I^{(k)}}$) $\|x - a\| < \delta$ fuer alle $x \in I^{(k)}$ mit $k \ge k_0$. Sei nun $x \in I^{(k)}$, $k \ge k_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{-1}(Tx) - x^{(k)} &= \tilde{T}^{-1}(Tx) - x + x - x^{(k)} \\ &= \tilde{T}^{-1}(Tx) - \tilde{T}^{-1}(\tilde{T}x) + x - x^{(k)} \\ &= DT(a)^{-1}\,R(x-a) + (x - x^{(k)}) \end{aligned}$$

(da fuer alle $y, z \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} y - z &= \tilde{T}(\tilde{T}^{-1}y) - \tilde{T}(\tilde{T}^{-1}z) \\ &= DT(a)(\tilde{T}^{-1}y - \tilde{T}^{-1}z), \end{aligned}$$

daher $\tilde{T}^{-1}y - \tilde{T}^{-1}z = DT(a)^{-1}(y-z)$), also

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}^{-1}(Tx) - x^{(k)}\| &\leq \|DT(a)^{-1}\, R(x-a)\| + \|x - x^{(k)}\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}\, \|x-a\| + \|x - x^{(k)}\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}\left(\|x - x^{(k)}\| + \|x^{(k)} - a\|\right) + \|x - x^{(k)}\| \\ &\leq (1+\varepsilon)\, 2^{-k}, \end{aligned}$$

also $\tilde{T}^{-1}(T(I^{(k)})) \subset I_\varepsilon^{(k)}$ und so $T(I^{(k)}) \subset \tilde{T}(I_\varepsilon^{(k)})$, falls $k \geq k_0$.

IV Es folgt fuer $k \geq k_0(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \lambda^n(T(I^{(k)})) &\leq \lambda^n(\tilde{T}(I_\varepsilon^{(k)})) \\ &\overset{\text{Satz 2.5.4}}{=} |\det DT(a)|\, \lambda^n(I_\varepsilon^{(k)}) \\ &\overset{\S\ 2.4.5}{=} |\det DT(a)|\, (1+\varepsilon)^n \lambda^n(I^{(k)}), \end{aligned}$$

also nach **II**

$$c\, \lambda^n(I^{(k)}) \leq \Big(\sup_{x \in I} |\det DT(x)|\Big)(1+\varepsilon)^n \lambda^n(I^{(k)}),$$

d.h. $c \leq (1+\varepsilon)^n \sup\limits_{x \in I} |\det DT(x)|$ fuer alle $\varepsilon > 0$. Mit $\varepsilon \searrow 0$ erhalten wir

$$\lambda^n(T(I)) \leq \Big(\sup_{x \in I} |\det DT(x)|\Big) \lambda^n(I).$$

V Nach der Bemerkung zu Lemma 7.2.1 laesst sich jedes offene $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ schreiben als

$$\mathcal{O} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} I_k,$$

mit $I_k \in \mathcal{I}^n$ fuer alle $k \in \mathbb{N}$.

VI Sei $\mathcal{O} \subset U$ offen. Dann folgt

$$\begin{aligned} \lambda^n(T(\mathcal{O})) &= \lambda^n\Big(T\Big(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} I_k\Big)\Big) \\ &= \lambda^n\Big(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} T(I_k)\Big) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^n(T(I_k)) \\ &\overset{\textbf{IV}}{\leq} \sum_{k \in \mathbb{N}} \Big(\sup_{x \in I_k} |\det DT(x)|\Big) \lambda^n(I_k) \\ &\leq \Big(\sup_{x \in \mathcal{O}} |\det DT(x)|\Big) \lambda^n(\mathcal{O}). \end{aligned}$$

VII Ist $k \in \mathbb{N}$ gross genug, so liegt

$$\mathcal{O}_k = \Big(a - \frac{1}{k}, b\Big)$$

in U und $\mathcal{O}_k \searrow I$. Da T ein Diffeomorphismus ist, ist das Bild $T(\mathcal{O}_k)$ offen. Wenden wir **VI** auf T^{-1}, so folgt

$$\begin{aligned}\lambda^n(\mathcal{O}_k) &= \lambda^n(T^{-1}(T(\mathcal{O}_k))) \\ &\le \Big(\sup_{y\in T(\mathcal{O}_k)} |\det DT^{-1}(y)|\Big)\lambda^n(T(\mathcal{O}_k)).\end{aligned}$$

Mit $k \to \infty$ erhalten wir

$$\lambda^n(I) \le \Big(\sup_{y\in T(I)} |\det DT^{-1}(y)|\Big)\lambda^n(T(I)).$$

Weiter gilt nach dem Satz von der inversen Funktion $DT^{-1}(Tx) = (DT(x))^{-1}$ (siehe Analysis II!), also

$$\det DT^{-1}(Tx) = \frac{1}{\det DT(x)}$$

fuer alle $x \in I$, d.h.

$$\sup_{y\in T(I)} |\det DT^{-1}(y)| = \frac{1}{\inf_{x\in I} |\det DT(x)|}.$$

VIII Aus **IV** und **VII** folgt fuer alle $I \in \mathcal{I}^n$ mit $\overline{I} \subset U$:

$$\Big(\inf_{x\in I} |\det DT(x)|\Big)\lambda^n(I) \le \lambda^n(T(I)) \le \Big(\sup_{x\in I} |\det DT(x)|\Big)\lambda^n(I).$$

IX Wir zerlegen $I = [a, b)$ nunmehr in k^n gleich grosse Teilquader I_i, $1 \le i \le k^n$, und setzen

$$\begin{aligned}u_k &:= \sum_{i=1}^{k^n} \Big(\sup_{x\in I_i} |\det DT(x)|\Big)\chi_{I_i}, \\ v_k &:= \sum_{i=1}^{k^n} \Big(\inf_{x\in I_i} |\det DT(x)|\Big)\chi_{I_i}.\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}v_k(x) &\le |\det DT(x)| \le u_k(x), \\ \lim_{k\to\infty} v_k(x) &= |\det DT(x)| = \lim_{k\to\infty} u_k(x)\end{aligned}$$

fuer alle $x \in I$. Ferner

$$\begin{aligned}
\int_I v_k(x)dx &= \sum_{i=1}^{k^n} \Big(\inf_{x\in I_i} |\det DT(x)| \Big) \lambda^n(I_i) \\
&\overset{\textbf{VIII}}{\leq} \sum_{i=1}^{k^n} \lambda^n(T(I_i)) \\
&= \lambda^n(T(I)) \\
&\overset{\textbf{VIII}}{\leq} \sum_{i=1}^{k^n} \Big(\sup_{x\in I_i} |\det DT(x)| \Big) \lambda^n(I_i) \\
&= \int_I u_k(x)dx.
\end{aligned}$$

Der Satz von Lebesgue liefert (u_k, v_k beschraenkt!)

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \int_I v_k(x)dx &= \int_I |\det DT(x)|\, dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_I u_k(x)dx,
\end{aligned}$$

also die Behauptung.

□

8.1.4 Die Substitutionsformel

Satz 8.1.4 *Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, $g : \mathcal{X} \to [0, \infty]$ messbar. Dann gilt:*

1) *Durch $\nu(A) := \int_A g d\mu$, $A \in \mathcal{A}$, wird ein Mass ν auf $\mathcal{A}$ definiert.*

2) *Fuer $f : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ gilt $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{X}; \nu)$ genau dann, wenn $fg \in \mathcal{L}^1(\mathcal{X}; \mu)$, und in diesem Fall ist*

$$\int_A f d\nu = \int_A fg\, d\mu$$

fuer alle $A \in \mathcal{A}$.

Beweis.
1) Uebungsaufgabe!
2) Fuer $f \geq 0 \to$ Uebungsaufgabe! Fuer allgemeines f betrachte die Darstellung $f = f^+ - f^-$.

□

Satz 8.1.5 (Substitutionsformel im $\mathbb{R}^n$) *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $T : U \to V = T(U)$ ein C^1-Diffeomorphismus, sei $f : V \to [-\infty, \infty]$ messbar. Dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(V)$ genau dann, wenn $(f \circ T)\,|\det DT| \in \mathcal{L}^1(U)$, und in diesem Fall ist*

$$\int_{T(U)} f(y)dy = \int_U f(T(x))|\det DT(x)|\,dx.$$

Beweis. Durch

$$\nu(A) = \int_A |\det DT(x)|\,dx$$

wird ein Mass ν definiert (setze in Satz 8.1.4 $\mathcal{X} = U$, $\mu = \lambda^n$ und $\mathcal{A} =$ Borel-Algebra in U). Nach Satz 8.1.3 gilt

$$\begin{aligned} T^{-1}(\lambda^n)(I) &= \lambda^n(T(I)) \\ &= \nu(I) \end{aligned}$$

fuer alle $I \in \mathcal{I}^n$ mit $\overline{I} \subset U$. Diese I bilden aber einen $\cap$-stabilen Erzeuger von $\mathcal{A}$, also gilt nach dem Eindeutigkeitssatz 2.3.2

$$T^{-1}(\lambda^n) = \nu.$$

Wir wenden nun Satz 8.1.1 und Folgerung 8.1.1 an, mit $\mathcal{X} = U$, $\mathcal{Y} = V = T(U)$ und $\mu = T^{-1}(\lambda^n) = \nu$. Es ist dann $T(\mu) = \lambda^n$, also

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{L}^1(T(U)) &\overset{\text{Folgerung 8.1.1}}{\Leftrightarrow} f \circ T \in \mathcal{L}^1(U;\nu) \\ &\overset{\text{Satz 8.1.4}}{\Leftrightarrow} (f \circ T)\,|\det DT| \in \mathcal{L}^1(U), \end{aligned}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{T(U)} f(y)dy &= \int_{T(U)} f dT(\mu) \\ &\overset{\text{Folgerung 8.1.1}}{=} \int_U f \circ T\, d\mu \\ &\overset{\text{Satz 8.1.4}}{=} \int_U f(T(x))|\det DT(x)|\,dx. \end{aligned}$$

□

8.1.5 Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$

Satz 8.1.6 *Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ messbar, sei $T : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $T(r, \varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Mit $\tilde{f}(r, \varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r$ gilt $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ genau dann, wenn $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1((0, \infty) \times (0, 2\pi))$, und in diesem Fall ist*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdrd\varphi.$$

Beweis. Setze in Satz 8.1.5

$$\begin{aligned} U &= (0,\infty)\times(0,2\pi), \\ V &= T(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}. \end{aligned}$$

Da $\mathbb{R}^2 \setminus V$ eine Nullmenge ist, gilt $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ genau dann, wenn $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(U)$, und in diesem Fall ist

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda^2 = \int_U \tilde{f} d\lambda^2.$$

Die Behauptungen folgen nun aus Satz 8.1.5, da $|\det DT(r,\varphi)| = r$.

□

8.1.6 Beispiele

I Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch, d.h. es gibt ein $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = F(\sqrt{x^2+y^2})$. Es ist $(f \circ T)(r,\varphi) = F(r)$, also

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^\infty F(r)\, r dr d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^\infty F(r)\, r dr, \end{aligned}$$

falls $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(0,\infty)$, $\tilde{f}(r) = F(r)r$.

II Die Flaeche des Kreises $K(0,R)$ um 0 mit Radius R ist

$$\begin{aligned} \lambda^2(K(0,R)) &= 2\pi \int_0^\infty \chi_{[0,R]}(r)\, r dr \\ &= \pi R^2. \end{aligned}$$

III $f(x,y) = \exp(-x^2-y^2)$ ergibt $F(r) = \exp(-r^2)$, also

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda^2 &= 2\pi \int_0^\infty \exp(-r^2)\, r dr \\ &= -\pi \exp(-r^2)\,|_0^\infty \\ &= \pi. \end{aligned}$$

8.1.7 Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$

Satz 8.1.7 *Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ messbar, sei $U = (0,\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi)$, sei $T : U \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $T(r,\vartheta,\varphi) := (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$. Mit $\tilde{f}(r,\vartheta,\varphi) = f(T(r,\vartheta,\varphi))\, r^2 \sin\vartheta$ gilt $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$ genau dann, wenn $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(U)$, und in diesem Fall ist*

$$\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(x,y,z)\, dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi\int_0^\infty f(T(r,\vartheta,\varphi))\, r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi.$$

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 8.1.6:

$$\mathbb{R}^3 \setminus T(U) = \{(x, 0, z) : x \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\}$$

ist Nullmenge im $\mathbb{R}^3$.

$\square$

8.1.8 Anwendung

I Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch, d.h. es gibt ein $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$. Es ist $(f \circ T)(r, \vartheta, \varphi) = F(r)$, also

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} f d\lambda^3 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(r)\, r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{\infty} F(r)\, r^2 dr \\
&= 4\pi \int_0^{\infty} F(r)\, r^2 dr,
\end{aligned}$$

und $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3)$ genau dann, wenn $F(r) r^2 \in \mathcal{L}^1(0, \infty)$.

II Volumen der Kugel $K(0, R)$ um 0 mit Radius R: Anwendung von $\mathbb{I}$ mit $F = \chi_{[0,R]}$ ergibt

$$\begin{aligned}
\lambda^3(K(0, R)) &= 4\pi \int_0^{\infty} \chi_{[0,R]}(r)\, r^2 dr \\
&= 4\pi \int_0^{R} r^2 dr \\
&= \frac{4}{3} \pi R^3.
\end{aligned}$$

III Gravitationspotential der Kugel $K(0, R)$ mit rotationssymmetrischer Dichte ϱ, siehe Fig. 8.2. Das Gravitationspotential im Punkt $P = (0, 0, a)$

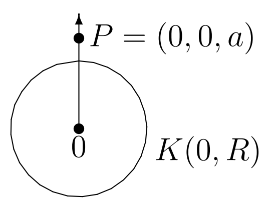


Fig. 8.2: Gravitationspotential

ausserhalb der Kugel ist gegeben durch

$$\wp(P) = \gamma \int_{K(0,R)} \frac{\varrho(\|x\|_2)}{\|x-P\|_2} dx,$$

γ ist eine Gravitationskonstante. Substituieren wir $x = T(r, \vartheta, \varphi)$, so ergibt sich $\varrho(\|x\|_2) = \varrho(r)$ und

$$\begin{aligned} & \|T(r,\vartheta,\varphi) - P\|_2^2 \\ = \;& r^2(\sin\vartheta)^2(\cos\varphi)^2 + r^2(\sin\vartheta)^2(\sin\varphi)^2 + (r\cos\vartheta - a)^2 \\ = \;& r^2 - 2ar\cos\vartheta + a^2. \end{aligned}$$

Es folgt also

$$\begin{aligned} \wp(P) &= \gamma \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \frac{\varrho(r) r^2 \sin\vartheta}{\sqrt{r^2 - 2ar\cos\vartheta + a^2}} dr d\vartheta d\varphi \\ &= 2\pi\gamma \int_0^R \varrho(r) r^2 \Big(\int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{r^2 - 2ar\cos\vartheta + a^2}} d\vartheta \Big) dr. \end{aligned}$$

Substitution $t = -\cos\vartheta$, $dt = \sin\vartheta d\vartheta$ ergibt

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{r^2 - 2ar\cos\vartheta + a^2}} d\vartheta &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2art + a^2}} dt \\ &= \frac{\sqrt{r^2 + 2art + a^2}}{ar} \Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{ar} \Big(\sqrt{(r+a)^2} - \sqrt{(r-a)^2} \Big) \\ &= \frac{2}{a}, \end{aligned}$$

also

$$\wp(P) = 4\pi \, \frac{\gamma}{a} \int_0^R \varrho(r) r^2 \, dr.$$

Andererseits gilt fuer die Gesamtmasse der Kugel

$$\begin{aligned} M &= \int_{K(0,R)} \varrho(\|x\|_2) dx \\ &\overset{\mathbf{I}}{=} 4\pi \int_0^{\infty} \chi_{[0,R]}(r) \varrho(r) r^2 dr \\ &= 4\pi \int_0^R \varrho(r) r^2 dr, \end{aligned}$$

also

$$\wp(P) = \frac{\gamma}{a} M,$$

d.h. das von der Kugel herruehrende Schwerefeld ist ausserhalb der Kugel dasselbe wie das einer Punktmasse M im Nullpunkt!

Kapitel 9

Faltung

9.1 Faltung

9.1.1 Definition

Satz 9.1.1 *Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann wird durch*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

eine Funktion $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert, die sogenannte "Faltung von f und g". Es gelten dabei $f * g = g * f$ und $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Beweis. Seien $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ Repraesentanten von f bzw. g. Wir definieren $\tilde{h} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ durch $\tilde{h}(x,y) := \tilde{f}(x)\tilde{g}(y)$. Dann gilt nach Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{2n}} |\tilde{h}|\, d\lambda^{2n} &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\tilde{f}(x)||\tilde{g}(y)|\, dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(x)|\, dx \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{g}(y)|\, dy \\
&= \|\tilde{f}\|_1 \|\tilde{g}\|_1 \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

also $\tilde{h} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{2n})$. Wir definieren $T : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ durch $T(x,y) = (x-y, y)$. Dann wird T durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} E_n & -E_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$$

repraesentiert, wobei E_n die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^n$ ist. Es ist $\det A = 1$ und $(\tilde{h} \circ T)(x,y) = \tilde{f}(x-y)\tilde{g}(y)$, also

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |\tilde{f}(x-y)\tilde{g}(y)|\, dxdy = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\tilde{h} \circ T|\, d\lambda^{2n}$$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Satz 8.1.2}}{=} \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\tilde{h}|\, d\lambda^{2n} \\ &= \|\tilde{f}\|_1 \|\tilde{g}\|_1. \end{aligned}$$

Nach Fubini ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |(\tilde{f} * \tilde{g})(x)|\, dx &\le \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(x-y)\tilde{g}(y)|\, dx dy \\ &= \|\tilde{f}\|_1 \|\tilde{g}\|_1, \end{aligned}$$

also $\tilde{f} * \tilde{g} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $\|\tilde{f} * \tilde{g}\|_1 \le \|\tilde{f}\|_1 \|\tilde{g}\|_1$.

Weiter folgt

$$\begin{aligned} (\tilde{f} * \tilde{g})(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{h}(x-y, y)\, d\lambda^n \\ &\overset{\text{Substitution } z = x - y}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{h}(z, x-z)\, d\lambda^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(z)\tilde{g}(x-z)\, d\lambda^n \\ &= (\tilde{g} * \tilde{f})(x) \end{aligned}$$

fuer alle $x \in \mathbb{R}^n$, fuer die die Integrale existieren (und das sind fast alle).

Damit sind alle Behauptungen im $\mathcal{L}^1$ bewiesen. Wir fuehren den Uebergang zum L^1 durch. Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $g_1, g_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $[f_1] = [f_2]$, $[g_1] = [g_2]$ im $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $[h_1] = [h_2]$ im $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{2n})$, da

$$\{h_1 \ne h_2\} \subset \Big(\{f_1 \ne f_2\} \times \mathbb{R}^n\Big) \cup \Big(\mathbb{R}^n \times \{g_1 \ne g_2\}\Big),$$

also $[h_1 \circ T] = [h_2 \circ T]$, da T und T^{-1} Nullmengen auf Nullmengen abbilden. Also (nochmal Fubini)

$$\begin{aligned} 0 &\le \int_{\mathbb{R}^n} |f_1 * g_1 - f_2 * g_2|\, d\lambda^n \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} |(h_1 - h_2) \circ T|\, d\lambda^{2n} \\ &= 0, \end{aligned}$$

d.h. $[f_1 * g_1] = [f_2 * g_2]$.

□

9.1.2 Faltungsalgebra

Satz 9.1.2

1) *Die Faltung ist eine assoziative binaere Operation auf* $L^1(\mathbb{R}^n)$.

2) *Die Faltung auf* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *kommutiert mit Translation auf* $\mathbb{R}^n$, *d.h. es gilt* $(f * g) \circ T_a = (f \circ T_a) * g = f * (g \circ T_a)$ *fuer jedes* $a \in \mathbb{R}^n$.

Beweis.
1) Es ist

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x - z)h(z)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - z - y)g(y)h(z)dydz \\
&\overset{\text{Substitution } y = w - z}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - w)g(w - z)h(z)dwdz \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} (f * (g * h))(x).
\end{aligned}$$

2) Es ist

$$\begin{aligned}
((f * g) \circ T_a)(x) &= (f * g)(x + a) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x + a - y)g(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T_a)(x - y)g(y)dy \\
&= ((f \circ T_a) * g)(x).
\end{aligned}$$

Da die Faltung kommutativ ist, ergibt sich auch die zweite Gleichheit. □

Man kann Faltung auf jeder kommutativen topologischen Gruppe $\mathcal{G}$ definieren. Als Mass auf $\mathcal{G}$ betrachtet man ein Mass auf der Borel-Algebra von $\mathcal{G}$, dass invariant unter der Gruppenoperation ist. Ein solches Mass wird bis auf einen konstanten Faktor definiert und es heisst Haar-Mass. Die Faltung ist kommutativ und assoziativ. Darueber hinaus kommutiert die Faltung mit der Gruppenoperation.

Kapitel 10

Dichteaussagen

10.1 Dichteaussagen

10.1.1 Traeger von Funktionen

Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$. Fuer Funktionen $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ heisst

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathcal{X} : \; f(x) \neq 0\}}$$

der "Traeger von f" (in $\mathcal{X}$). Der Traeger von f ist stets abgeschlossen. Falls er auch noch beschraenkt, also kompakt ist, heisst f eine "Funktion mit kompaktem Traeger".

Die Menge der stetigen Funktionen auf $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ mit kompaktem Traeger wird mit $C_0(\mathcal{X})$ bezeichnet.

Man setzt $C_0^\infty(\mathcal{X}) := C_0(\mathcal{X}) \cap C^\infty(\mathcal{X})$. Die Elemente von $C_0^\infty(\mathcal{X})$ heissen auch "Testfunktionen" auf $\mathcal{X}$.

Es ist in der Analysis ein probates Mittel, nichtglatte Funktionen durch solche aus $C_0^\infty(\mathcal{X})$ zu approximieren (speziell in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen). Wir wollen zunaechst einmal zeigen, dass $C_0^\infty(\mathcal{X})$ nicht leer ist.

10.1.2 Konstruktion einer Glaettungsfunktion

Wir definieren $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp\Big(-\dfrac{1}{t}\Big), & \text{falls} \quad t > 0, \\ 0, & \text{falls} \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Dann ist $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, siehe Analysis I. Wir definieren

$$\omega(x) := c\,\varphi(1 - \|x\|_2^2),$$

mit $c > 0$. Nach Kettenregel ist $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und der Traeger von ω ist die abgeschlossene Kugel $K(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$. Wir waehlen $c > 0$ so, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega(x)dx = 1.$$

Nun definieren wir $\omega_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\omega_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n}\,\omega\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big),$$

$\varepsilon > 0$.

Lemma 10.1.1 *Die oben definierte Funktion $\omega_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, hat folgende Eigenschaften:*

1) $\omega_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* $\operatorname{supp}(\omega_\varepsilon) = K(0,\varepsilon)$.

2) $\omega_\varepsilon \geq 0$.

3) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x)dx = 1$.

4) *Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in \mathcal{X}$, $K(a,\varepsilon) \subset \mathcal{X}$ fuer ein $\varepsilon > 0$. Dann gilt $\omega_\varepsilon(x-a) \in C_0^\infty(\mathcal{X})$.*

Beweis. 1), 2) und 4) sind klar nach Konstruktion. Zu 3):

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x)dx &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} \omega\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \omega(y)dy \\
&= 1,
\end{aligned}$$

vermittels der Substitution $T(x) = x/\varepsilon$, mit $|\det T(x)| = \varepsilon^{-n}$.

□

10.1.3 Approximation von L^p-Funktionen durch Treppenfunktionen

Definition 10.1.1 *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heisst "allgemeine Treppenfunktion", falls*

$$f = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{A_i}$$

gilt mit $c_i \in \mathbb{R}$ und paarweise disjunkten Borel-Mengen A_i, wobei gelte:

1) $\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{i=1}^{N} A_i$;

2) $c_i \neq 0 \Rightarrow \lambda(A_i) < +\infty$.

Nicht jede Treppenfunktion ist auch allgemeine Treppenfunktion, da 2) nicht gelten muss. Andererseits ist jede integrierbare Treppenfunktion eine allgemeine Treppenfunktion.

Satz 10.1.1 *Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$. Dann gibt es eine Folge allgemeiner Treppenfunktionen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\|f - f_k\|_p \to 0$ wenn $k \to \infty$.*

Beweis. Sei $\tilde{f}$ Repraesentant von f, also $\tilde{f}^p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $\tilde{f} = f$ f.ü. im $\mathbb{R}^n$.

I Sei $\tilde{f} \geq 0$. Dann gibt es eine Folge von Treppenfunktionen

$$t_k = \sum_{i=1}^{N_k} c_{k,i}\chi_{A_{k,i}}$$

mit

1) $\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{i=1}^{N_k} A_{k,i}$;

2) $c_{k,i} \geq 0$ fuer alle $i = 1, \ldots, N_k$,

so dass

$$\tilde{f}^p = \sup_{k\in\mathbb{N}} t_k.$$

Dann ist $f_k := \sqrt[p]{t_k}$ ebenfalls Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^n$, und $\tilde{f} = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$. Offenbar ist f_k messbar, und

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} f_k^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} t_k dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}^p dx \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

d.h. $f_k \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Der Satz von Lebesgue liefert $\|\tilde{f} - f_k\|_p \to 0$ wenn $k \to \infty$. Ferner ist f_k integrierbare Treppenfunktion, also eine allgemeine Treppenfunktion.

II Sei $\tilde{f}$ allgemein. Zu $\tilde{f}^+$, $\tilde{f}^-$ existieren nach **I** zu $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen

$$\begin{aligned} g &= \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{A_i}, \\ h &= \sum_{j=1}^{M} d_j \chi_{B_j} \end{aligned}$$

im $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\tilde{f}^+ - g\|_p < \varepsilon/2$ und $\|\tilde{f}^- - h\|_p < \varepsilon/2$. Sei

$$\begin{aligned} t &:= g - h \\ &= \sum_{i,j} (c_i - d_j)\, \chi_{A_i \cap B_j}. \end{aligned}$$

Dann sind $(A_i \cap B_j)_{i,j}$ disjunkt mit

$$\bigsqcup_{i,j} A_i \cap B_j = \mathbb{R}^n.$$

Ist $c_i - d_j \neq 0$, so gilt mindestens eine der Ungleichungen $c_i > 0$ und $d_j > 0$, daher ist $\lambda(A_i \cap B_j) < \infty$. Die Funktion t ist also allgemeine Treppenfunktion mit $\|f - t\|_p < \varepsilon$.

III Wegen $\tilde{f} = f$ f.ü. ist auch $\|f - f_k\|_p \to 0$ wenn $k \to \infty$.

□

10.1.4 Dichte Teilmengen

Sei $(\mathcal{X}, d)$ ein metrischer Raum. $A \subset \mathcal{X}$ heisst "dicht in $\mathcal{X}$", falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $x \in \mathcal{X}$ ein $a \in A$ mit $d(x, a) < \varepsilon$ gibt.

Folgerung 10.1.1 *Die Menge der allgemeinen Treppenfunktionen liegt dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ fuer $1 \leq p < \infty$.*

Beweis. Satz 10.1.1.

□

Satz 10.1.2 *$C_0(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$ fuer $1 \leq p < \infty$.*

Beweis. Jedes $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ laesst sich nach Satz 10.1.1 durch eine Folge von allgemeinen Treppenfunktionen in L^p-Norm approximieren. Es genuegt daher, die Aussage fuer den Fall $f = \chi_A$ fuer Borel-Mengen A mit $\lambda^n(A) < \infty$ zu zeigen. Dann ist aber $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und f laesst sich durch Treppenfunktionen $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auf Quadern approximieren. Dann sind auch $f_k := \max\{0, \min\{1, t_k\}\}$ solche Treppenfunktionen, und es gilt $|f - f_k|^p \leq |f - f_k| \leq |f - t_k|$, d.h.

$\|f - f_k\|_p \to 0$. Es genuegt daher, den Fall $f = \chi_Q$, wobei $Q = [a, b]$ ein abgeschlossener Quader im $\mathbb{R}^n$ ist, zu betrachten. Dann gilt aber $f_k \to f$ in L^p-Norm fuer $k \to \infty$, wenn man setzt

$$f_k(x) = \prod_{j=1}^{n} \max\left\{0, \min\left\{1, \frac{l_j(x_j)}{1/k}\right\}\right\},$$

wobei

$$l_j(x_j) := \frac{b_j - a_j}{2} - \left|x_j - \frac{b_j + a_j}{2}\right|$$

fuer $j = 1, \ldots, n$. In der Tat, offenbar gilt

$$\max\{0, \min\{1, k l_j(x_j)\}\} \to \chi_{[a_j, b_j)}(x_j)$$

fuer alle $x_j \in (a_j, b_j)$, d.h. f.ü. in $[a_j, b_j)$. Folglich gilt $f_k(x) \to \chi_Q(x)$ f.ü. auf Q, und f_k ist auf Q stetig. Die Aussage folgt aus dem Satz von Lebesgue.

□

10.1.5 Approximation von L^p-Funktionen durch glatte Funktionen

Satz 10.1.3 *Sei $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $f_\varepsilon := f * \omega_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ fuer alle $\varepsilon > 0$, und ferner, fuer $\varepsilon \searrow 0$,*

1) *$f_\varepsilon \to f$ gleichmaessig im $\mathbb{R}^n$;*

2) *$f_\varepsilon \to f$ in L^p-Norm, $1 \le p < +\infty$.*

Beweis. Wegen $f \in C_0(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ folgt 2) unmittelbar aus 1) und dem Satz von Lebesgue.

Zu 1): Es gilt

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x - y) f(y) dy.$$

Wir haben $\operatorname{supp}(f_\varepsilon) \subset U_\varepsilon(\operatorname{supp}(f)) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \operatorname{supp}(f)) \le \varepsilon\}$, d.h. $\operatorname{supp}(f_\varepsilon)$ ist kompakt.

Ferner ist

$$|\partial_x^\alpha \omega_\varepsilon(x - y)\, f(y)| \le \|\partial^\alpha \omega_\varepsilon\|_\infty \|f\|_\infty\, \chi_{\operatorname{supp}(f)}(y)$$

fuer alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und fuer jeden Multiindex $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$. Satz 5.2.2 liefert, dass $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, also insgesamt $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Sei nun $o > 0$. Wir waehlen $\varepsilon > 0$ so, dass $|f(x) - f(y)| \leq o$ fuer alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\|_2 \leq \varepsilon$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{\text{Lemma 10.1.1}}{=} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x-y) f(x) dy \end{aligned}$$

fuer alle $x \in \mathbb{R}^n$, also

$$\begin{aligned} |f(x) - f_\varepsilon(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x-y)|f(x) - f(y)|\, dy \\ &\leq o \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x-y)dy \\ &\overset{\text{Lemma 10.1.1}}{=} o, \end{aligned}$$

d.h. $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x) - f_\varepsilon(x)| \leq o$.

□

Folgerung 10.1.2 *Die Menge der Testfunktionen $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$, fuer $1 \leq p < +\infty$.*

Beweis. Satz 10.1.2 und Satz 10.1.3.

□

Kapitel 11

Fouriertransformation

11.1 Fouriertransformation

11.1.1 Definition

Fuer $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert man die Fouriertransformation Ff bzw. $\hat{f}$ als Funktion auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath\langle \xi, x\rangle} f(x)\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\imath = \sqrt{-1}$ und $\langle \xi, x\rangle = \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n$.

Beispiel 11.1.1 Fuer die Gauß'sche Funktion

$$f(x) = \exp\Big(- \frac{1}{2\hbar} \|x\|_2^2 \Big)$$

$\hbar > 0$, ist die Fouriertransformierte

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi\hbar)^{n/2} \exp\Big(- \frac{\hbar}{2} \|\xi\|_2^2 \Big).$$

11.1.2 Verhalten unter affinen Transformationen

Satz 11.1.1 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:*

1) *Fuer $g(x) = f(x+a)$ und $h(x) = e^{\imath\langle x, a\rangle} f(x)$ mit $a \in \mathbb{R}^n$ ist*

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= e^{\imath\langle \xi, a\rangle} \hat{f}(\xi), \\ \hat{h}(\xi) &= \hat{f}(\xi - a). \end{aligned}$$

2) *Ist $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine invertierbare lineare Transformation, so ist*

$$(f \circ T)^\wedge (\xi) = |\det T|^{-1} \hat{f}\left((T^{-1})^* \xi\right).$$

Beweis. Klar.

□

Insbesondere:

Homothetie Ist $g(x) = f(rx)$ mit $0 \neq r \in \mathbb{R}$, so gilt $\hat{g}(\xi) = |r|^{-n}\hat{f}(\xi/r)$.

Orthogonale Transformation Ist T orthogonal (d.h. $T^* = T^{-1}$), so ist $(f \circ T)^{\wedge} = \hat{f} \circ T$.

11.1.3 Satz von Riemann-Lebesgue

Satz 11.1.2 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:*

1) $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

2) $\hat{f}$ *ist stetig und* $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$ *(Satz von Riemann-Lebesgue).*

Beweis.
1) Uebungsaufgabe!
2) Der Grenzwert ist explizit fuer $f = \chi_Q$, wobei Q ein Quader im $\mathbb{R}^n$ ist. Satz 10.1.1 liefert, dass der von solchen Funktionen aufgespannte Vektorraum dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Fuer jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine allgemeine Treppenfunktion T auf Quadern mit $\|f - T\|_1 \leq \varepsilon$. Daraus ergibt sich mit Hilfe von 1), dass

$$\begin{aligned} \limsup_{|\xi|\to\infty} |\hat{f}(\xi)| &\leq \limsup_{|\xi|\to\infty} \Big(|\hat{T}(\xi)| + \varepsilon\Big) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

□

11.1.4 Faltungssatz

Satz 11.1.3 *Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$F(f * g) = \hat{f}\hat{g}.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} F(f*g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath\langle\xi,x\rangle}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy\Big)dx \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath\langle\xi,x\rangle} f(x-y)dx\Big)g(y)dy \\ &\overset{\text{Substitution } x=z+y}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath\langle\xi,y\rangle}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath\langle\xi,z\rangle} f(z)dz\Big)g(y)dy \\ &= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi), \end{aligned}$$

da $e^{-\imath\langle\xi,x\rangle}f(x-y)g(y)$ Lebesgue-integrierbar auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ist.

□

11.2 Raum der schnellfallenden Funktionen

11.2.1 Der Schwartz-Raum

Der Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist der Vektorraum aller $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft, dass fuer alle Multi-Indizes α und β gilt

$$\begin{aligned} \|x^\beta \partial^\alpha f(x)\|_\infty &:= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha f(x)| \\ &< \infty. \end{aligned} \tag{11.2.1}$$

Der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ heisst auch Raum der schnellfallenden Funktionen, da aus (11.2.1) folgt:

> fuer jeden Multi-Index α und jedes $N \in \mathbb{N}$ gibt es eine Konstante $c_{\alpha,N} > 0$ derart, dass $|\partial^\alpha f(x)| \le c_{\alpha,N}\,(1+|x|)^{-N}$ fuer alle $x \in \mathbb{R}^n$.

11.2.2 Eigenschaften

Satz 11.2.1

1) *Ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so gilt $x^\beta\partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ fuer alle Multi-Indizes α und β.*

2) *Sind $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so ist $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

3) *Ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so gilt $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fuer alle $1 \le p \le \infty$.*

4) *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein vollstaendiger metrischer Raum; eine Folge $\{f_n\}$ konvergiert gegen f, falls fuer alle Multi-Indizes α und β gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \|x^\beta \partial^\alpha (f_n - f)\|_\infty = 0.$$

Beweis.
1), 2) Leibniz-Regel.
3) Es ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-Q} dx < \infty$$

genau dann, wenn $Q > n$. Zu $1 \le p < \infty$ waehle $N \in \mathbb{N}$ mit $Np > n$. Nach (11.2.1) gibt es $c > 0$, so dass

$$|f(x)| \le c\,(1+|x|)^{-N}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \\ &\leq c^p \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-Np} dx \\ &< \infty. \end{aligned}$$

4) Siehe Ü.

□

Eine lineare Abbildung $A\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist genau dann stetig, falls es zu jeder Wahl von Multi-Indizes α und β endlich viele Multi-Indizes α_k und β_k, $k = 1, \ldots, K$, und ein $c > 0$ gibt mit

$$\|x^\beta \partial^\alpha (Af)\|_\infty \leq c \max_{k=1,\ldots,K} \|x^{\beta_k} \partial^{\alpha_k} f\|_\infty.$$

11.2.3 Fouriertransformation

Definieren wir

$$D_j = \frac{1}{\imath} \partial_j$$

und $D^\alpha = \imath^{-|\alpha|}\partial^\alpha$. Der Faktor $1/\imath$ ist durch die Fourier-Transformation motiviert, wie gleich klar werden wird.

Satz 11.2.2 *Fuer alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und Multi-Indizes α, β gilt*

$$\begin{aligned} (D^\alpha f)^\wedge(\xi) &= \xi^\alpha \hat{f}(\xi), \\ (x^\beta f)^\wedge(\xi) &= (-1)^{|\beta|} D^\beta \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Beweis. Ü.

□

Folgerung 11.2.1 *Ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so auch $\hat{f}$. Ferner ist die Abbildung $F:\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig.*

Beweis. Nach Satz 11.2.2 ist

$$\xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{f}(\xi) = (-1)^{|\beta|} (D_x^\alpha (x^\beta f))^\wedge(\xi).$$

Nach Satz 11.2.1, 1), 3) ist $D^\alpha(x^\beta f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, also die rechte Seite beschraenkt nach Satz 11.1.2, 2). Die Stetigkeit folgt mit Satz 11.2.1, 4).

□

Satz 11.2.3 *Fuer $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx.$$

Beweis. Mit Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath\langle x,y\rangle} f(y)dy \right) g(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-\imath\langle y,x\rangle} g(x)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int e^{-\imath\langle y,x\rangle} g(x)dx \right) dy.
\end{aligned}$$

□

11.2.4 Inversionsformel

Satz 11.2.4 *Fuer $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\hat{\hat{f}}(x) = (2\pi)^n f(-x)$ fuer alle $x \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist $F^4 = (2\pi)^{2n} Id$. Also ist $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bijektiv und $F^{-1} = (2\pi)^{-2n} F^3$, d.h.*

$$(F^{-1}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath\langle x,\xi\rangle} f(\xi)d\xi.$$

Beweisskizze. Setze

$$\psi(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\|x\|_2^2}{2} \right),$$

dann ist $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\|\psi\|_1 = 1$. Bezeichnet man

$$\psi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

fuer $\varepsilon > 0$, so gilt nach Satz 11.1.1, 2)

$$(\psi(\varepsilon y))^\wedge(\xi) = (2\pi)^{n/2} \psi_\varepsilon(\xi).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\hat{\hat{f}}(x) &= \int e^{-\imath\langle x,\xi\rangle} \hat{f}(\xi)d\xi \\
&\xleftarrow{\text{majorisierte Konvergenz}} (2\pi)^{n/2} \int e^{-\imath\langle x,\xi\rangle} \psi(\varepsilon\xi)\hat{f}(\xi)d\xi \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} (2\pi)^{n/2} \int (\psi(\varepsilon y))^\wedge(\xi) f(\xi - x)d\xi \\
&= (2\pi)^n \int \psi_\varepsilon(\xi) f(\xi - x)d\xi \\
&= (2\pi)^n \left(\psi_\varepsilon * f(-y)\right)(x).
\end{aligned}$$

Es ist
$$(\psi_\varepsilon * f(-y))\,(x) \overset{\varepsilon\to 0}{\to} f(-x)$$
in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Es gibt daher eine Folge $\varepsilon_k \to 0$ mit
$$(\psi_{\varepsilon_k} * f(-y))\,(x) \overset{k\to\infty}{\to} f(-x)$$
fuer fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Also gilt $\hat{\hat{f}}\,(x) = f(-x)$ f.ü. im $\mathbb{R}^n$ und somit fuer alle $x \in \mathbb{R}^n$, da f und $\hat{\hat{f}}$ stetig sind.

□

Folgerung 11.2.2 *Fuer $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist*
$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dx = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Beweis. Setze $h = \overline{\hat{g}}$. Dann ist
$$\begin{aligned} h(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath\langle y,x\rangle}\overline{g(x)}dx \\ &= \hat{\bar{g}}\,(-y). \end{aligned}$$
Folglich ist nach Satz 11.2.4
$$\begin{aligned} \hat{h} &= \left(\hat{\bar{g}}\,(-y)\right)^\wedge \\ &= (2\pi)^n\,\bar{g} \end{aligned}$$
und die Behauptung folgt aus Satz 11.2.3.

□

Insbesondere:
$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{n/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \qquad (11.2.2)$$

11.2.5 Der Satz von Plancherel

Satz 11.2.5

1) $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *liegt dicht in* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *fuer* $1 \le p < \infty$.

Beweis.
1) ist klar.
2) folgt aus 1) und Folgerung 10.1.2.

□

Satz 11.2.6 (Plancherel) *Die Fouriertransformation laesst sich zu einem Isomorphismus* $F: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ *fortsetzen. Es gilt*

$$(Ff, Fg)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^n (f,g)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{11.2.3}$$

fuer alle $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Insbesondere ist $(2\pi)^{-n/2}F$ eine Isometrie auf $L^2(\mathbb{R}^n)$, d.h. (11.2.2) gilt fuer jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Zu $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ waehle eine Folge $\{f_k\}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Nach Folgerung 11.2.2 ist $\{\hat{f}_k\}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\mathbb{R}^n)$, also konvergent, da $L^2(\mathbb{R}^n)$ vollstaendig ist. Setze

$$\hat{f} := \lim_{k\to\infty} \hat{f}_k.$$

□

Im Beweis von Satz 11.2.6 wurde ein allgemeines Fortsetzungsprinzip angewandt:

> Seien $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ metrische Raeume, $\mathcal{Y}$ vollstaendig, $\mathcal{D}$ eine dichte Teilmenge von $\mathcal{X}$ und $A : \mathcal{D} \to \mathcal{Y}$ gleichmaessig stetig. Dann gibt es genau ein stetiges $\tilde{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ mit $\tilde{A}|_{\mathcal{D}} = A$.

Die Gleichung (11.2.3) heisst Parseval'sche Gleichung. Sie ist eine weitgehende Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras in der Theorie von Hilbert-Raeumen.

Bemerkung 11.2.1 Wir nennen das Element $\hat{f}$ die Plancherel-Fouriertransformierte von f. Die Folge $\{\hat{f}_k\}$ muss nicht in jedem Punkt ξ gegen $\hat{f}$ konvergieren. Nach dem Satz von Carleson (1966) strebt die Folge $\{\hat{f}_k\}$ gegen $\hat{f}$ f.ü., falls $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Nach einem Beispiel von Kolmogorov (1926) gibt es eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft, dass die Folge $\{\hat{f}_k\}$ in keinem Punkt konvergiert.

11.3 Fouriertransformation der Funktionen mit kompaktem Traeger

11.3.1 Stuetzfunktionen

Sei K eine (konvexe) kompakte Menge im $\mathbb{R}^n$. Fuer jedes feste $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $x \mapsto \langle \xi, x\rangle$ stetig auf K, also nimmt sie ihr Maximum auf K an.

Definition 11.3.1 *Die Funktion*

$$H_K(\xi) = \max_{x \in K} \langle \xi, x \rangle$$

auf $\mathbb{R}^n$ *heisst die Stuetzfunktion von* K.

Beachte: In der Dualitaetstheorie interpretiert man ξ als Variable des Dualraums $(\mathbb{R}^n)^*$.

Lemma 11.3.1 *Sei* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *eine Funktion mit kompaktem Traeger* $K = \operatorname{supp}(f)$. *Dann gilt fuer alle* $\zeta = \xi + \imath\eta$ *im komplexen Raum* $\mathbb{C}^n$*:*

$$|\hat{f}(\zeta)| \leq \exp(H_K(\eta)) \, \|f\|_1.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\zeta)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\exp(-\imath\langle \xi + \imath\eta, x\rangle)||f(x)| \, dx \\ &= \int_K |\exp(\langle \eta, x\rangle)||f(x)| \, dx \\ &\leq \exp(H_K(\eta)) \, \|f\|_1. \end{aligned}$$

□

11.3.2 Der Satz von Paley-Wiener

Satz 11.3.1 *Sei* K *eine konvexe kompakte Menge im* $\mathbb{R}^n$. *Ist* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *eine Funktion mit* $\operatorname{supp}(f) \subset K$, *so hat* $\hat{f}$ *analytische Fortsetzung auf ganz* $\mathbb{C}^n$, *und es gilt* $|\hat{f}(\zeta)| \leq C \exp(H_K(\eta))$ *fuer alle* $\zeta = \xi + \imath\eta \in \mathbb{C}^n$. *Umgekehrt, ist* F *eine analytische Funktion auf* $\mathbb{C}^n$, *die* $|F(\zeta)| \leq C \exp(H_K(\eta))$ *mit einer Konstante* $C > 0$ *erfuellt und zu* L^2 *auf dem reellen Unterraum im* $\mathbb{C}^n$ *gehoert, so ist* F *die Fouriertransformation einer Funktion* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\operatorname{supp}(f) \subset K$.

Beweis. Der erste Teil des Satzes ist einfach und er folgt aus Lemma 11.3.1 bis auf Analytizitaet der Fouriertransformation. Zum zweiten Teil sei auf [Hoe83, 7.3.1] verwiesen.

□

Kapitel 12

Wavelets

12.1 Wavelets

12.1.1 Lokalisierung in den Zeit- und Raum-Variablen

12.1.2 Fourier-Analysis

12.1.3 Die Haar-Basis

12.1.4 Einige Beispiele

Literaturverzeichnis

[Bau78] Bauer, Heinz, *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*, Walter de Gruyter, Berlin et al., 3. Aufl., 1978.

[Coh80] Cohn, Donald L., *Measure Theory*, Birkhäser, Boston, Mass., 1980, 373 pp.

[Els96] Elstrodt, J., *Maß und Integrationstheorie*, Springer, Berlin et al., 1996.

[Fed69] Federer, H., *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, Berlin et al., 1969.

[Hoe83] Hörmander, L., *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin et al., 1983.

[WZ77] Wheeden, Richard L., and Zygmund, Antoni, *Measure and Integral*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 43, Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, 1977, 274 pp.

Sachverzeichnis